

# 近似代数計算と有理関数近似に関する研究

村上 裕美\*

YUMI MURAKAMI

愛媛大学大学院 理工学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, EHIME UNIVERSITY

甲斐 博†

HIROSHI KAI

愛媛大学 工学部

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE, EHIME UNIVERSITY

野田 松太郎‡

MATU-TAROW NODA

愛媛大学 工学部

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE, EHIME UNIVERSITY

## 1 はじめに

有理関数補間は、関数  $f(x)$  を分子が  $m$  次の多項式  $p_m(x)$ 、分母が  $n$  次の多項式  $q_n(x)$  からなる有理関数  $r_{m,n}(x)$  によって補間する手法である。このとき、 $r_{m,n}(x)$  は以下のような有理関数である。

$$r_{m,n}(x) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^n b_j x^j} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n} \quad \text{for } \alpha \leq x \leq \beta \quad (1)$$

関数  $f(x) \in [\alpha, \beta]$  に対する有理関数補間は次のように計算される。 $m+n+1$  個の離散点  $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+n} = \beta$  を与え、対応する関数値  $f(x_k) = f_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m+n$  を求める。ここで、 $f_k = r_{m,n}(x_k)$  より、以下のような  $m+n+1$  個の連立一次方程式を構成する。

$$f_k = \sum_{i=0}^m a_i x_k^i - f_k \sum_{j=1}^n b_j x_k^j \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, m+n \quad (2)$$

この連立一次方程式を解くことによって、有理関数  $r_{m,n}(x)$  の各係数  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  を求めることができる。

しかし、数値計算によって連立一次方程式を解いた場合、元の関数  $f(x)$  が連続であるのに対し、求めた有理関数が極 (不必要な極) を生じる場合がある [2, 3, 5]。これまでの研究では、さまざまな関数に対する有理関数補間を計算することで、不必要な極に関して次のような特徴があることが分かっている。

\*cumi@hpc.cs.ehime-u.ac.jp

†kai@cs.ehime-u.ac.jp

‡noda@cs.ehime-u.ac.jp

1. 有理関数の分母の補間区間内の零点には、必ず近いところに分子の零点が存在し、近似的な共通因子となっている
2. これらは有理関数補間を数値的に計算する場合の数値誤差に起因している

これらの特徴は、数値実験の点からのみ議論されているおり、一般的な議論はされていない。

また、不必要な極のない高精度な有理関数近似を求める手法として、ハイブリッド有理関数近似が提案されている。この手法は、分子と分母の近似的な共通因子を近似 GCD によって除去し、高精度な有理関数補間を求める手法である。しかしながら、近似 GCD として除去している分子分母の近似的な共通因子は、厳密な意味で共通因子として除去し得るものであるか否かを明らかにするためには、近似的な共通因子が生じる原因を明確にする必要がある。

本論では、不必要な極の原因となっている分子と分母の近似的な共通因子がいかんして生じるかを解析する。すでに我々は、不必要な極の出現が有理関数補間を求める場合の連立一次方程式の悪条件性に起因することを述べている [4]。ここではさらに、この悪条件性がどのように分子分母の近似的な共通因子に影響するかを明らかにする。

## 2 有理関数補間の問題の分類

悪条件問題の特徴として、非正則行列と正則行列の識別ができないことが挙げられる。これは、数値計算の計算過程の誤差によって、どちらの場合もランク落ちに非常に近い小さな成分だけで構成される行が生じることが原因となっている。有理関数補間の問題に限定すれば、連立一次方程式の係数行列が正則行列か否かで、以下のように分類することができる。

### 1. 非正則行列の場合

有理関数補間の問題において、近似を行う関数  $f(x)$  が厳密な有理関数の形で表せる場合に対応する。すなわち、求めようとする有理関数補間  $r_{m,n}(x)$  には、厳密解が唯一存在する問題である。

### 2. 正則行列の場合

有理関数補間の問題において、近似を行う関数  $f(x)$  が  $\log$ ,  $\sin$ ,  $\exp$  などの連続関数を含む形で表される問題に対応する。このとき、連立一次方程式の係数行列は正則行列となるが、条件数が非常に大きく、悪条件な問題となっている。このような問題では、 $f(x)$  を近似できる有理関数補間の厳密解を唯一に定めることはできない。

## 3 非正則行列の場合

厳密解となる有理関数補間が唯一存在する場合の有理関数補間の問題を考える。ここで、厳密解となる有理関数  $r_{M,N}^*(x)$  を以下のように表す。

$$r_{M,N}^*(x) = \frac{p^*(x)}{q^*(x)} = \frac{a_0^* + a_1^*x + a_2^*x^2 + \cdots + a_M^*x^M}{1 + b_1^*x + b_2^*x^2 + \cdots + b_N^*x^N} \quad (3)$$

この  $r_{M,N}^*(x)$  を近似を行う関数  $f(x)$  として、以下の有理関数補間  $\tilde{r}_{m,n}(x)$  を求める問題を考える。

$$\tilde{r}_{m,n}(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} = \frac{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1x + \tilde{a}_2x^2 + \cdots + \tilde{a}_m x^m}{1 + \tilde{b}_1x + \tilde{b}_2x^2 + \cdots + \tilde{b}_n x^n} \quad (4)$$

ここで、 $\deg(p^*(x)) = M < \deg(\tilde{p}(x)) = m$  かつ  $\deg(q^*(x)) = N < \deg(\tilde{q}(x)) = n$ 、すなわち、求める有理関数補間  $\tilde{r}_{m,n}(x)$  は、厳密解よりも次数が大きな有理関数であると仮定する。

このとき、連立一次方程式の係数行列が非正則行列となるため、計算過程で厳密にランク落ちを生じる問題となることは記号計算によって容易に確認できる。ここで、ランク落ちを生じる行数を  $\gamma$  とすると、未定係数法により、ランク落ちした部分に対応する  $\gamma$  個の解ベクトルが未定記号  $t_1, t_2, \dots, t_\gamma$  で置き換えられる。

いま、連立一次方程式  $Ay = B$  と表し、行列  $A$  のサイズを  $\alpha \times \alpha$  とする。解ベクトルを  $y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_\alpha)$  と表す。Gauss 消去法により三角化された行列を  $\hat{A}$  とし、この行列の  $i$  行  $j$  行目の成分を  $\hat{A}_{i,j}$ 、対応する右辺の第  $i$  成分を  $\hat{B}_i$  と表すと、後退代入により、解  $Y_k$  は次のように求まる。

$$Y_k = \frac{1}{\hat{A}_{k,k}} (\hat{B}_k - \hat{A}_{k,k+1}Y_{k+1} - \hat{A}_{k,k+2}Y_{k+2} - \dots - \hat{A}_{k,k+\alpha}Y_\alpha)$$

もし、 $\hat{A}$  が  $\gamma$  行のランク落ちを生じているならば、解ベクトル  $y$  のうち、次の  $\gamma$  個の成分を未定記号で置きかえることで、残りの係数を求めることができる。すなわち、

$$Y_\alpha = t_\gamma, \quad Y_{\alpha-1} = t_{\gamma-1}, \quad \dots, \quad Y_{\alpha-\gamma+1} = t_1$$

とにおいて、残りの解  $Y_k$  を  $t_1$  から  $t_\gamma$  を用いて、後退代入を行うことによって計算される。したがって、求めた有理関数の各係数は、未定記号  $t_1$  から  $t_\gamma$  を含んだ形で表されるが、これらの記号が影響する項は、分割して表すことができる。すなわち、有理関数補間  $\tilde{r}_{m,n}(x)$  は、未定記号  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_\gamma$  を含む項に分割して次のように表すことができる。

$$\tilde{r}_{m,n}(x) = \frac{p_0(x) + t_1 p_1(x) + t_2 p_2(x) + \dots + t_\gamma p_\gamma(x)}{q_0(x) + t_1 q_1(x) + t_2 q_2(x) + \dots + t_\gamma q_\gamma(x)}$$

ここで、 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_\gamma(x)$  と  $q_0(x), q_1(x), \dots, q_\gamma(x)$  はそれぞれ、 $x$  に関する多項式である。ここで、任意の  $t_1, t_2, \dots, t_\gamma$  に対して、 $\tilde{r}_{m,n}(x)$  は与えられた関数 (すなわち、 $r_{M,N}^*(x)$ ) と一致することから、以下のようなことが分かる。

1.  $\gamma = 0$  の場合 (ランク落ちしない場合)

$$\tilde{r}_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} = r_{M,N}^*(x)$$

が成り立つ。したがって、 $p_0(x) = p^*(x)$ 、 $q_0(x) = q^*(x)$  となる。

2.  $\gamma = 1$  のとき

$$\tilde{r}_{m,n}(x) = \frac{p_0(x) + t_1 p_1(x)}{q_0(x) + t_1 q_1(x)} = \frac{p^*(x) + t_1 p_1(x)}{q^*(x) + t_1 q_1(x)} = r_{M,N}^*(x)$$

が成り立つ。上式が成り立つためには、

$$p_1 = u_1(x)p^*, \quad q_1 = v_1(x)q^*, \quad u_1(x) = v_1(x)$$

が成り立たなければならない。ここで、 $\deg(v_1(x)) = N + \gamma (= N + 1)$  であるから、仮に  $v_1(x) = c_1 + c_2x$  とおくと、

$$\tilde{q}(x) = p^* + t_1(c_1 + c_2x)p^*$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + t_1 c_1) + (b_1^* + t_1 c_1 b_1^* + t_1 c_2) x + (b_2^* + t_1 c_1 b_2^* + t_1 c_2 b_1^*) x^2 + \cdots \\
&\quad + (b_N^* + t_1 c_1 b_N^* + t_1 c_2 b_{N-1}^*) x^N + (t_1 c_2 b_N^*) x^{N+1} \\
&= \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 x + \tilde{b}_2 x^2 + \cdots + \tilde{b}_N x^N + \tilde{b}_{N+1} x^{N+1}
\end{aligned} \tag{5}$$

となる。ここで、 $b_0 = 1$  であるから、 $c_1 = 0$  であることが分かる。また、 $\tilde{b}_{N+1}$  は未定記号  $t_1$  で表されるから、

$$\tilde{b}_{N+1} = t_1 = t_1 c_2 b_N^*, \quad c_2 = \frac{1}{b_N^*}$$

となる。したがって、分子分母の共通因子は以下のように表せる。

$$v_1(x) = 1 + \frac{1}{b_N^*} x, \quad g(x) = 1 + \frac{t_1}{b_N^*} x \tag{6}$$

同様に、 $\gamma \geq 2$  の場合について考えると、一般には以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{m,n}(x) &= \frac{g(x)p^*(x)}{g(x)q^*(x)} = \frac{p^*}{q^*} \\
g(x) &= \begin{cases} 1 & (\gamma = 0) \\ \sum_{i=0}^{\gamma} t_i v_i(x) & (\gamma \geq 1) \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}$$

さらに、 $v_i(x)$  は、(5) のような計算によって、分母の厳密解の各係数  $b_i^*$  を用いて表すことができる。

数値計算では、計算過程の誤差によって、正しくランク落ちが生じない。したがって、(7) に示される共通因子  $g(x)$  の未定記号  $t_i$  に具体的な数値が代入されるために、分子と分母で  $g(x)$  が近似的な共通因子として残る。このように、有理関数の分子分母に現れる近似的な共通因子は、厳密な意味での共通因子であることが明らかとなった。共通因子の出現は、連立一次方程式がランク落ちを生じる ( $\gamma \geq 1$  である) ことが原因であるが、これは、補間を行う有理関数の次数  $(m, n)$  が厳密解の次数  $(M, N)$  よりも大きいことに起因する。

### 3.1 例

近似を行う関数  $f(x)$  として、Runge の関数を考える。

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \tag{8}$$

ここで、有理関数補間を 3 次の有理関数  $\tilde{r}_{3,3}(x)$  とし、入力データとして次の 7 個の離散データを与える。

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) := \left(-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

これらの点から構成される連立一次方程式の係数行列は、非正則行列となるため、ランク落ちを生じる。

### 3.1.1 厳密計算を行った場合

厳密計算で Gauss 消去法を実行すると、次のような三角化された行列が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{26} & -\frac{1}{26} & \frac{1}{26} \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -\frac{1}{13} & 0 & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{27} & -\frac{125}{4251} & -\frac{250}{12753} & \frac{5}{4251} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1250}{24089} & -\frac{2050}{216801} & \frac{50}{24089} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{100}{1989} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{26} \\ 0 \\ \frac{25}{26} \\ -\frac{6250}{12753} \\ -\frac{51250}{216801} \\ -\frac{2500}{1989} \\ 0 \end{bmatrix}$$

最後の行でランク落ちが生じていることが分かる。Runge の関数に対して、明らかに冗長な係数を含む有理関数で近似を行おうとしているために生じたものと考えられる。したがって、 $b_3$  は任意の定数を用いることができるため、一般に  $b_3 = t_1$  とすれば、

$$r_{3,3}(x) = \frac{1 + \frac{t}{25}x}{1 + \frac{t}{25}x + 25x^2 + tx^3} = \frac{1 + \frac{t}{25}x}{(1 + 25x^2)(1 + \frac{t}{25}x)} = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

となり、正確に Runge の関数と一致する。これは、前節の式 (7) において、

$$g(x) = 1 + \frac{t}{25}x$$

とした場合に対応する。ここで、 $b_2^* = 25$  より、 $g(x)$  は (6) と一致を確認することができる。

### 3.1.2 数値計算を行った場合

同様の操作を有効桁 8 桁の数値計算で行うと、

$$\hat{A} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0.03846 & -0.03846 & 0.03846 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -0.07692 & 0 & -0.07692 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.03846 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.370 & -0.02940 & -0.01960 & 0.00117 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05189 & -0.04082 & -0.002075 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.05027 & -0.9 \times 10^{-9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.168 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} \simeq (0.03846, 0, 0.9615, -0.4900, -1.020, -1.256, -0.6 \times 10^{-7})^T$$

を得る。 $\hat{A}_{7,7} \simeq 0.16818348 \times 10^{-8}$ 、 $\hat{B}_7 \simeq -0.6 \times 10^{-7}$  は、有効桁 8 桁に対して非常に小さく不正確な値となっており、有理関数近似は以下ようになる。

$$r_{3,3}(x) \simeq \frac{(x - 0.70076449)(1.136 \times 10^{-7}x^2 + 1.121 \times 10^{-7}x + 1.0000)}{(x - 0.70076453)(25.000x^2 + 1.4583 \times 10^{-6}x + 1.0000)}$$

分子分母に、 $(x - 0.70076449)$  と  $(x - 0.70076453)$  という近似的な共通因子が存在する。ここで、有効桁に対して小さな項を除去すると、

$$\tilde{r}_{3,3}(x) \simeq \frac{(x + 0.70076454)}{(x + 0.70076449)(25.000x^2 + 1.0000)} \simeq \frac{(1.0000 - 1.42701294x)p^*}{(1.0000 - 1.42701286x)q^*}$$

となり、前節の式 (7) との対比から

$$g(x) \simeq 1 - \frac{t_1}{b_2^*} \simeq 1 - \frac{-35.675323}{25} \simeq 1.0000 - 1.427012x$$

となっていることがわかる。この  $g(x)$  値は、上で求めた  $\tilde{r}_{3,3}(x)$  の近似的な共通因子に非常に近い。このように、厳密には未定記号で表され、厳密な共通因子となるものが、数値誤差によって未定記号  $t$  に具体的な数値が入ることによって近似的な共通因子として残っていることがわかる。

## 4 正則行列の場合

正則行列の場合、前節の議論で厳密解  $r_{M,N}^*(x)$  となる有理関数が一意に定まらない。すなわち、任意の  $(M, N)$  の組み合わせに対して、 $f(x) \simeq r_{M,N}^*$  なる厳密解  $r_{M,N}^*$  が存在する。例を上げると、 $f(x) = \log(x+2)$  に対して、

$$f(x) \simeq r_{3,3}^*(x) \simeq r_{3,4}^*(x) \simeq r_{4,4}^*(x) \simeq \dots$$

を満たすような有理関数  $r_{3,3}^*(x), r_{3,4}^*(x), r_{4,4}^*(x), \dots$  がそれぞれ存在する。

連続関数の問題は、悪条件な正則行列を解く問題である。したがって、数値計算によってランク落ちに近い行が生成されることで、非正則行列の場合と区別がつかない状況に陥る。そこで、これを厳密にランク落ちする場合と仮定すると、求める有理関数  $\tilde{r}_{m,n}(x)$  に対して、 $M < m, N < n$  なる厳密解  $r_{M,N}^*$  を選択したような問題と考えることができ、前節の非正則行列の議論と同様の議論が成り立つ。したがって、数値計算によって有理関数の分子分母に近似的な共通因子が生じる原因は、理論的には非正則行列の場合と同様であるといえる。

ただし、連続関数であるために厳密解  $r_{M,N}^*(x)$  を正しく求めることが不可能であり、また、 $\tilde{r}_{m,n}(x)$  が、悪条件問題を低い計算精度で解かなければならないことから、共通因子  $g(x)$  の理論値 (7) と数値実験の結果を実際に比較して、理論的に成り立つことを示すことはできない。

### 4.1 例

$\log(x+2)$  を  $\tilde{r}_{4,4}(x)$  で補間する問題を考える。

#### 4.1.1 計算精度が不足している場合

有効桁 8 桁で解いた場合には、 $\hat{A}$  は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -0 & 0 & -0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1.0098 & -1.0098 & -1.0098 & -1.0098 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0.5493 & 0.5493 & 0.5493 & 0.5493 \\ 0 & 0 & 0 & 0.375 & -0.1875 & 0.0654 & -0.2386 & -0.0866 & -0.1626 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4101 & 0.0194 & -0.0569 & 0.2183 & 0.2585 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0032 & -0.0082 & 0.0232 & -0.0829 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00012 & 0.00093 & -0.0079 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000106 & -0.00024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.59 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

このとき、対応する右辺ベクトル  $\hat{B}$  は、

$$(0, 1.009, 0.143, 0.0229, 0.0074, 0.0013, -0.000012, 0.18 \times 10^{-6}, 0.12 \times 10^{-7})^T$$

である。 $\hat{A}_{9,9}$  と  $\hat{B}_9$  は、有効桁 8 桁に対して非常に小さな値となっており、前節の Runge の関数の例のように厳密にランク落ちが生じる場合と区別がつかない状態になっている。このとき、得られる有理関数近似  $\tilde{r}_{4,4}^{(8)}$  は、

$$4.3509951 \frac{(x + 9.0370957)(x + 2.6984820)(x + 0.99999999)(x + 0.30582204)}{(x + 17.490224)(x + 3.9143055)(x + 2.2359466)(x + 0.30582202)}$$

となり、近似的な共通因子  $(x + 0.30582204)$  と  $(x + 0.30582202)$  を持つ。ここで、厳密解として  $r_{3,3}^*$  を考え、十分な有効桁で計算した 3 次の有理関数

$$r_{3,3}^*(x) \simeq \frac{0.69314 + 1.02938x + 0.36532x^2 + 0.029086x^3}{1 + 0.76373x + 0.15646x^2 + 0.0067175x^3}$$

を厳密解の近似解であると考え、今、

$$\gamma = (m + n + 1) - \text{rank}(A) = (4 + 4 + 1) - 8 = 1$$

であるから、共通因子  $g(x)$  は 1 次の多項式となり、

$$g(x) = 1 + \frac{t}{b_3^*}x \simeq 1 + \frac{t}{0.0067175}x$$

となる。数値実験の結果との対比から、 $\tilde{b}_3 = t \simeq 0.021360908$  より、

$$g(x) \simeq 1 + \frac{0.021360908}{0.0067175}x = 1 + 3.179857x \simeq 0.314479 + x$$

ここで、 $\tilde{r}_{4,4}(x)$  の近似的な共通因子は、 $(x + 0.30582204)$  と  $(x + 0.30582202)$  であるため、理論的な式 (6) によって与えられる共通因子  $g(x)$  の値とは、ずれが生じている。

ここで、悪条件問題を解かなければ、ランク落ちに近い状態が生じないことから、 $\tilde{r}_{4,4}(x)$  を求める場合には、有効桁の小さい状態で数値計算を行わなければならない。そのため、 $\tilde{r}_{4,4}(x)$  の各係数には大きな誤差が含まれる。また、厳密解  $r_{3,3}^*$  は連続関数の場合、正確なものを求めることはできないため、数値計算によって近似的に求めた値を使用している。上記のように、(6) から求まる  $g(x)$  と  $\tilde{r}_{4,4}(x)$  の近似的な共通因子が異なるのは、これらのことが原因であると考えられる。

#### 4.1.2 計算精度が十分な場合

条件数に対して十分大きな有効桁で計算を行った場合、 $\hat{A}$  は、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -0 & 0 & -0.0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1.0986 & -1.0986 & -1.0986 & -1.0986 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0.5493 & 0.5493 & 0.5493 & 0.5493 \\ 0 & 0 & 0 & 0.375 & -0.1875 & 0.0654 & -0.2386 & -0.0866 & -0.1626 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4101 & 0.0194 & -0.0569 & 0.2183 & 0.2585 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0032 & -0.0082 & 0.0232 & -0.0829 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.000121 & 0.000932 & -0.0079 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000108 & -0.000248 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.441 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

となり、対応する右辺ベクトル  $\hat{B}$  は、

$$(0, 1.0986, 0.1438, 0.0229, 0.0074, 0.0013, -0.1272, 0.170 \times 10^{-6}, 0.430 \times 10^{-8})^T$$

となる。このとき、 $\hat{A}_{9,9}$  と  $\hat{B}_9$  は、有効桁 20 桁であることを考慮すれば、十分正確に表せる大きさの値となっており、正則行列として計算されていることが分かる。前節の議論と対応させると、ランク落ちする行数  $\gamma = 0$  となるため、分子分母の共通因子は存在しない。実際に、上の行列から求まる有理関数  $r_{4,4}^{(20)}$  は、

$$4.83187052 \frac{(x + 15.38989469)(x + 4.0957493)(x + 2.3338340)(x + 0.99999999)}{(x + 27.9649060)(x + 5.8745217)(x + 2.9208291)(x + 2.1371586)} \quad (9)$$

となり、近似的な共通因子を持たない有理関数となる。

## 5 まとめ

本論では、有理関数補間を数値計算で求めた場合に生じる、不必要な極と零点の問題に関する解析を行った。結果として、有理関数の分子分母には厳密な共通因子が存在し、共通因子の次数はランク落ちを生じる行数と一致することを一般的な式として表すことができた。また、数値計算では厳密なランク落ちが生じないために、近似的な共通因子として残ることが、不必要な極と零点の原因であることが明確になった。

ハイブリッド有理関数近似は、分子と分母の近似的な共通因子を近似 GCD を用いて除去する手法である。本論で分子と分母の近似的な共通因子が厳密な意味での共通因子であることが明らかになったことにより、ハイブリッド有理関数近似の計算手法の理論的根拠を確立することができる。したがって、ハイブリッド有理関数近似は、小さな計算精度で、高精度な近似を得る手法として効果的なものであることを明確にすることができる。

## 参 考 文 献

- [1] G.Litvinov : Approximate construction of rational approximations and the effect of error autocorrection. Applications, in *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol.1, No.3, 1994 <http://arxiv.org/pdf/math.NA/0101042>
- [2] H.Kai and M.T.Noda : Hybrid rational function approximation and its accuracy analysis, *Reliable Computing* **6**, pp.429–438, 2000
- [3] M.T.Noda, E.Miyahiro and H.Kai: Hybrid rational function approximation and its use in the hybrid integration, in *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII*, eds.R. Vichnevetsky, D.Knight and G.Richter, IMACS, pp.565–571,1992
- [4] Y.Murakami, H.Kai and M.T.Noda : Approximate Algebraic Computation for Rational Function Approximations, ACA'2002 (to appear)
- [5] 甲斐 博、野田 松太郎 : 「ハイブリッド有理関数近似とデータの平滑化」, 日本応用数学会論文誌, Vol.3, pp.323–236, 1993