

区間数による多項式の評価について

平野 照比古*
神奈川工科大学

1 目的

区間演算を用いて与えられた多項式の ある区間における値の評価することについて考察する。

2 区間演算の解釈

区間数 X とは 閉区間 $[\underline{X}, \overline{X}]$ で与えられる実数の集合である。([3, p.9]) 区間数に対する演算は、その演算に現れる区間数に属する数のすべての組み合わせに対する最小値と最大値の区間で与えられる。これを別の観点からみれば、区間数が現れるごとに、新しい変数を導入し、その変数の定義域をその区間数の範囲とした多変数の最大値と最小値をその結果とする演算に一致する。この結果、各変数については一次式になるので求める結果は各変数の定義域の端点になることも分かる。

この考え方を、区間数に対しては分配則が成立しないことの説明に用いることができる。([1, p.4]) 区間数では

$$X(Y + Z) \subseteq XY + XZ \quad (1)$$

が成立することが知られている。上記の解釈では右辺の区間演算から導入される関数は $X_1Y + X_2Z$ という 4 変数の関数となる。(ただし、 X_1 と X_2 は同じ定義域を持つ。) したがって、左辺の関数 $XY + XZ$ で取る値の集合は右辺で取る値の集合に含まれる。つまり (1) が成立する。

3 一変数多項式の評価

次に、一変数の多項式のある区間における評価を考える。

分配則 (1) の結果を考慮すれば多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$ を区間 $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ で評価するには Horner の方法を用いるのが有利であることが予想される。また、二つの区間数 $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ と $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ において $\underline{X} < 0 < \overline{X}$, $0 \leq \underline{Y} < \overline{Y}$ のときは

$$XY = [\underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\overline{Y}]$$

となり、区間の幅の増加が大きくなる。したがって、 \overline{Y} を小さくしておく計算法が区間数の演算の結果が良いと考えられる。

実際、次の定理が成立する。[4, Main Theorem]

*hilano@gen.kanagawa-it.ac.jp

定理 1

n 次多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$ に対し、

$$g(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} x^j = f(a+x) \quad (2)$$

とする。 $0 < a < b$ に対し、Horner の方法により $f(x)$ を区間数 $[a, b]$ で評価した区間を $f([a, b])$ で表せば $g([0, b-a]) \subseteq f([a, b])$ が成立する。

評価する区間が 0 を含む場合には上記の包含関係が一般には成立しない。[4, Example 3.2] 0 を含む場合には 0 を端点とする二つの区間に分けて評価するのが良いと考えられる。なお、 0 を端点とする区間における多項式の区間演算による評価は簡単な形になる。[4, Proposition 2.2]

命題 2

n 次多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$ の区間 $[0, a]$ における最大値と最小値は

$$\sum_{j=k}^n c_j a^{n-j}, (k = 0, 1, \dots, n).$$

の中にある。

4 区間数を係数に持つ一変数の多項式の評価

次に、 n 次多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$ の係数が区間数の場合に評価することを考えよう。区間演算ではできるだけ演算の回数が少ないほうが、上記の解釈で現れる変数の数が少なくすむ。したがって、与えられた多項式を上記の定理で変形してから行うのは結果として不利であると考えられる。ここでは次のようにすることを提案する。

アルゴリズム 1

区間数を係数とする多項式のある区間における評価

入力 区間数を係数とする n 次多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n$ と変数 x の区間 $[a, b]$

出力 区間演算によるこの区間における $f(x)$ の値の範囲

- 方法
1. 各係数をその区間数の上端または下端で置き換えた係数を持つ多項式を上記の定理を用いて評価する。(2^{n+1} 通りの場合がある。)
 2. 各係数を下端を取った場合には $[0, \text{その区間数の幅}]$ に、上端を取った場合には $[-\text{その区間数の幅}, 0]$ にした多項式を単純な方法で評価する。
 3. 対応する評価を加え一番小さい最大値と一番大きい最小値を結果とする。

5 二変数多項式の評価

この応用として普通の係数を持つ 2 変数多項式 $f(x, y)$ の $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ に対する評価を計算することができる。

アルゴリズム 2

二変数多項式の区間数に対する評価

入力 二変数多項式 $f(x, y) = \sum_{j=0}^m g_j(y)x^j$ で各 $j = 0, 1, \dots, n$ に対し $g_j(y) = \sum_{k=0}^n a_{j,k}y^k$ と区間数 $x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2]$

出力 上記区間数に対する $f(x, y)$ の評価

方法 1. 各係数 $g_k(y)$ に対し $c_k = g_k([y_1, y_2])$ を求める。

2. この区間数を係数に持つ 1 変数多項式 $f(x, y) = \sum_{j=0}^m c_j x^j$ を上記のアルゴリズムで求める。

しかし、特別な場合には事態が簡単になる。

命題 3

2 変数多項式 $f(x, y)$ が調和関数であるとする。調和関数に対しては最大値の原理が成立する $[,]$ ので $x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2]$ に対する最大値及び最小値は次の区間に含まれる。

$$f(x_1, [y_1, y_2]) \cup f(x_2, [y_1, y_2]) \cup f([x_1, x_2], y_1) \cup f([x_1, x_2], y_2)$$

6 一変数多項式の複素数解を求める方法

一変数多項式 $f(z)$ に対し、 $f(x + iy)$ とおいた実部と虚部の関数は調和関数であるから、これを利用して $f(z)$ の複素根まで求める非常に簡単なアルゴリズムを与えることができる。

アルゴリズム 3

一変数の多項式のすべての根を求める。

1. $f(x)$ を有理整数係数の n 次既約多項式とする。 $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく。 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ はともに実数係数の多項式とする。
2. $f(x)$ の根の限界 M を求める。
3. $f(x)$ の実数解を求め、その数を r_1 とする。
4. $List = [[-M, M], [0, M]]$ とする。 $x = [-M, M], y = [0, M]$ として
5. $List$ からひとつ要素を取り出し、前の成分を x の、後の成分を y の区間として $u(x, y)$ と $v(x, y)$ の区間演算の評価をし、どちらかが符号が一定であるかどうかを判定する。どちらも符号が一定でない場合にはこの区間の縦または横のうち長いほうの区間を半分にした区間を新しい区間のリストに付け加える。
6. この操作を必要な精度まで繰り返す。

このアルゴリズムを Risa/Asir インプリメントしたプログラムは開発してあるがまだ時間はかかっている。計算の効率を上げるためには計算の細かい省略をする必要がある。

参 考 文 献

- [1] Alefeld, G. and Herzberger, J., *Introduction To Interval Computations*, Academic Press
- [2] Knuth, Donald E., *The Art of Computer Programming*, Vol.1 3rd. Ed, Addison Wesley Longman, 1997
- [3] Moore, Roman E., *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM Studies in Applied in Applied Mathematics, 1979
- [4] Hilano, T., Interval Analysis for Evaluation of Polynomials and its Application, 2002, *submitted*
- [5] 平野 照比古 www.hilano.org/dist/realzero.tar.gz