Projective Moduli Space for the Polynomials of Degree n or Less

藤村 雅代[*]　　西沢 清子[†]
防衛大学校　　城西大学

Abstract

The moduli space, consisting of all affine conjugacy classes of the maps, is considered as a smooth complex $(n-1)$-manifold under some condition. In [2], we proved the projection Ψ_n, correspondence of each conjugacy class of maps on the moduli space to the elementary symmetric functions of the multipliers of the fixed points, is not surjective for $n \geq 4$. The image of the moduli space under this projection Ψ_n is denoted by $\Sigma(n)$. The complement of $\Sigma(n)$ is denoted by $\mathcal{E}(n)$, and called the exceptional set. It is very interested to analyze the exceptional set $\mathcal{E}(n)$.

In this paper, we show that the projective moduli space corresponds to the projective space $\mathbb{CP}^{n-1}$ of compactification of $\Sigma(n)$. On the exceptional set are the stratified conjugacy classes of a family of degenerate polynomials. And, the polynomials with degree $n-1$ or less systematically corresponds to the hyperplane at infinity of $\mathbb{CP}^{n-1}$.

1 はじめに

n 次多項式全体からなる空間は $n+1$ 次元複素多様体をなすが、n 次多項式空間の共役類の空間であるモジュライ空間は、ある条件のもとで $n-1$ 次元複素多様体としてみなすことができる。このモジュライ空間の各点において、不動点の乗数の基本対称式を対応させせることによって得られる $n-1$ 次元複素空間への射影 Ψ_n を考えたとき、$n \geq 4$ の場合、射影 Ψ_n は全射にならないことが [2] で得られている。Ψ_n によるモジュライ空間の像を $\Sigma(n)$ とし、その補集合 $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \Sigma(n)$ を $\mathcal{E}(n)$ と書き、除外集合と呼ぶ。$\mathcal{E}(n)$ の解析をすることは大変興味深いことである。[2] においても n 次有理関数族のモジュライ空間に n 次多項式のモジュライ空間を埋め込むことによって、除外集合部分には n 次有理関数の共役類が対応するという 1 つの解釈を述べた。

この論文では別の視点から除外集合 $\mathcal{E}(n)$ の解釈をする。$\Sigma(n)$ の自然な意味でのコンパクト化として射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ を考えることができる。そこで n 次以下の多項式のモジュライ空間である射影モジュライ空間を定義し、射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ との対応づけをする。

第 2 節では、準備としてモジュライ空間の定義と [1], [2] で得られた結果を書き出す。

第 3 節では、射影モジュライ空間を定義し $\mathbb{CP}^{n-1}$ との対応づけについて述べる。

[*]masayo@nda.ac.jp
[†]kiyoko@math.josai.ac.jp

2 準備

2.1 n 次多項式空間のモジュライ空間

空間 $\mathrm{Poly}_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ をそれ自身に写す全ての n 次多項式写像からなる空間とする。アフィン変換群 $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ の空間 $\mathrm{Poly}_n(\mathbb{C})$ 上での作用を

$$g \circ p \circ g^{-1} \in \mathrm{Poly}_n(\mathbb{C}) \quad \text{ただし} \quad g \in \mathfrak{A}(\mathbb{C}),\ p \in \mathrm{Poly}_n(\mathbb{C})$$

で与えることにする。

2 つの n 次多項式 $p_1,\ p_2$ に対して、$g \circ p_1 \circ g^{-1} = p_2$ をみたすアフィン変換群 $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ の元 g が存在するとき、p_1 と p_2 はアフィン共役であるといい、$p_1 \sim p_2$ と記す。この作用による $\mathrm{Poly}_n(\mathbb{C})$ の商空間 $\mathrm{Poly}_n(\mathbb{C})/_\sim$ を n 次多項式空間の**モジュライ空間**といい $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ と記す。

任意の n 次多項式 p は $\mathfrak{A}(\mathbb{C})$ の作用により “monic” (主係数が 1) かつ “centered” (不動点の重心が原点にある) な多項式とアフィン共役になる。しかし同じ共役類には $(n-1)$ 個の monic で centered な n 次多項式が存在し、それらは互いに 1 の $(n-1)$ 乗根から成る群 $G(n-1)$ の作用で写り合う。このような $G(n-1)$ の作用を無視すれば、共役類に属する monic で centered な n 次多項式 $p(z) = z^n + c_{n-2}z^{n-2} + c_{n-3}z^{n-3} + \cdots + c_1 z + c_0$ が一意に定まる。

全ての monic かつ centered な多項式の空間に $(c_0, c_1, \cdots, c_{n-2})$ で座標を入れたアフィン空間を $\mathcal{P}_1(n)$ とすると、空間 $\mathcal{P}_1(n)$ から $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の上への $(n-1)$ 対 1 の自然な射影 $\Phi_n : \mathcal{P}_1(n) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が存在する。したがって、群 $G(n-1)$ の分だけ曖昧さが残るものの、$\mathcal{P}_1(n)$ を $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の座標空間とみなすことができる。これを**係数座標系**と呼ぶ。

一方、ある関数族の変換群によるモジュライ空間に座標を入れる研究は多項式族以外でも行われている。例えば 2 次有理関数族に対して J. Milnor ([4] 参照) が導入した不動点における微分係数による座標の入れ方がある。この方法を n 次多項式族に適用する。

n 次多項式 p に対し、p の不動点を $z_1,\ \cdots,\ z_n,\ z_{n+1} = \infty$ とし、z_i での乗数を $\mu_i = p'(z_i)$ $(1 \le i \le n)$ とする。ただし、多項式では無限遠点における乗数は $\mu_{n+1} = 0$ である。次に、これら $n+1$ 個の乗数に対して次の基本対称式を考える:

$$\sigma_{n,1} = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \quad \sigma_{n,2} = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \cdots + \mu_{n-1}\mu_n, \quad \cdots$$
$$\cdots, \sigma_{n,n} = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n, \quad \sigma_{n,n+1} = 0$$

これら $n+1$ 個の乗数は、アフィン共役のもとで不変であることに注意しておく。

ここで、これら $n+1$ 個の基本対称式の間の関係式を求めるために、不動点における正則指数の概念を導入する。有理関数 f の不動点 $\zeta \in \mathbb{C}$ (もし無限遠点が不動点の場合には Möbius 変換で、無限遠点が不動点でないようにすればよい) に対し、

$$i(f, \zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z - f(z)}$$

を ζ における f の**正則指数**と呼ぶ。ただし、右辺の積分は ζ を中心とする十分小さい円 C 上を正の向きに沿って計算するものとする。

この正則指数には、次のような性質があることが知られている。(Fatou's Index Theorem)

- 不動点 ζ での乗数が $\mu \neq 1$ のとき $i(f, \zeta) = \frac{1}{1-\mu}$
- f が恒等写像でなければ $\sum_{\zeta = f(\zeta)} i(f, \zeta) = 1$

n 次多項式で考えると、無限遠点は乗数 0 の不動点であるので、$\mathbb{C}$ 内の n 個の不動点における正則指数の和は 0 になる。この性質を用いると次の線形関係を得るが、これは [2] における、Key Lemma であった。

- 基本対称式 $\sigma_{n,i}$ $(1 \le i \le n)$ の間には、次の線形関係がある。

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k)\sigma_{n,k} = 0 \tag{1}$$

ただし $\sigma_{n,0} = 1$ とおく。

このことから、各点 $\langle p\rangle \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対して、代表元 p の不動点とその乗数を計算し、基本対称式を求めることにより、基本対称式の対 $(\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}, \cdots, \sigma_{n,n-2}, \sigma_{n,n}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ を対応させる写像:

$$\Psi_n : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{n-1}$$

を得る。この写像が全射であるか否か、すなわち、複素数の対 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-2}, \sigma_n)$ を与え、σ_{n-1} を (1) から求めたとき、基本対称式が σ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となるような不動点の乗数を持つ n 次多項式を決定することは興味深いことである。この問題を**全射問題** (Surjective Problem) と呼ぶことにする。

$n = 3$ の場合、この全射問題はうまく解け Ψ_3 は全単射であることが [3] で得られている。しかしながら、小節 2.2 で述べるように $n \ge 4$ の場合 Ψ_n は全射ではない。

ここで Ψ_n による $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の像を $\Sigma(n)$ とおく。また $\Sigma(n)$ の補集合を $\mathcal{E}(n)$ と書き**除外集合**と呼ぶ。$\mathcal{E}(4)$ は $(\sigma_{4,1}, \sigma_{4,2}, \sigma_{4,4}) = (4, s, s^2/4 - 2s + 4)$, $(s \ne 6)$ であることが [5] で得られている。

2.2 『全射問題』の結果から

ここでは、[2] で得られた結果のうち、この論文で必要なものを説明無しで述べる。まず、全射問題の部分的解決である定理について述べるため、記号をいくつか準備する。

添字の集合を $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ とおく。$\Sigma(n)$ の部分集合 $\Sigma_*(n)$ を次で定義する:
集合 $\Sigma_*(n)$ は $\mathbb{C}^{n-1}$ の部分集合であり、$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-2}, \sigma_n) \in \Sigma_*(n)$ に対して、根と係数の関係から対応する乗数を $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ とおいたとき、次の条件 Case A〜C のいずれかをみたすものとする。

Case A
1. $\mu_i \ne 1$ $(i \in \Omega)$ かつ、
2. $\sum_{i\in\Omega} \frac{1}{1-\mu_i} = 0$ かつ、
3. Ω の任意の真部分集合 ω に対して $\sum_{i\in\omega} \frac{1}{1-\mu_i} \ne 0$ である。

Case B
1. $\mu_i \ne 1$ をみたすものだけを並べかえ、新たに、$(\mu_1, \cdots, \mu_N)$ とおいたとき、N は $1 \le N \le n-2$ をみたす。かつ、
2. $\Omega' = \{1, 2, \cdots, N\}$ とおいたとき、Ω' の任意の部分集合 ω' に対して $\sum_{i\in\omega'} \frac{1}{1-\mu_i} \ne 0$ である。(“真” 部分集合ではないことに注意)

Case C $\mu_i = 1$ $(i \in \Omega)$

このとき次の定理が成り立つ。

- **Theorem (Polynomial case [2])** 任意の $(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \cdots,\, \sigma_{n-2},\, \sigma_n) \in \Sigma_*(n)$ に対して、不動点における乗数の基本対称式の値が $(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \cdots,\, \sigma_{n-2},\, \sigma_n)$ となる n 次多項式 $p(z)$ が存在する。

- **Corollary ([2])** 除外集合は疎集合である。

この定理より、多項式の場合の Fatou's index theorem の恒等式 $\sum_{\zeta=f(\zeta)} i(f;\zeta)=0$ が 2 つ以上の "部分和 $=0$" の部分に分割不可能なら n 次多項式の存在が保証される。この事実は、3 節の定理 3 の写像 $\widehat{\Psi}_n$ の構成において "Key" となるものである。

また、除外集合 $\mathcal{E}(n)$ は、$\mathbb{C}^{n-1}\setminus\Sigma_*(n)$ に含まれることから疎集合である。

- **Theorem (Exceptional set is nonempty [2])** $n\geq 4$ に対して、除外集合 $\mathcal{E}(n)\neq\emptyset$ である。

2.3 力学曲線

ここでは、モジュライ空間上で力学系を研究する上で重要な役割を果たす 2 つの曲線の定義をする。一つは、モジュライ空間を "critical orbit" の型によって分類するときにその境界の一部になる $\mathcal{P}\mathrm{er}(m;\mu)$ であり、もう一つは、モジュライ空間の特異部分である symmetry locus $\mathcal{S}$ である。

ある多項式の空間 Ω において、乗数が μ の m 周期点を持つようなすべての共役類 $\langle p\rangle$ からなる集合を $\mathcal{P}\mathrm{er}_\Omega(m;\mu)$ と書くことにする。$\Omega=\mathrm{Poly}_n(\mathbb{C})$ の場合には、簡単のため $\mathcal{P}\mathrm{er}_n(m;\mu)$ と書くことにする。

多項式 p に対して $g\circ p\circ g^{-1}=p$ をみたすアフィン変換群の元 g を p の自己同型写像と呼ぶ。このような自己同型写像全てからなる群を $\mathrm{Aut}(p)$ と書く。集合 symmetry locus $\mathcal{S}_n$ を

$$\mathcal{S}_n=\left\{\langle p\rangle\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})\,;\,\mathrm{Aut}(p)\text{ is non-trivial}\right\}$$

によって定義する。[1] より、n 次多項式は次の形の多項式と共役であるときに限り non-trivial な自己同形群を持つことがわかっている:

$$z^n+\sum_{1\leq i\leq[n/k]}A_k(i)z^{ki+1}+Bz$$

ただし、k は $k|(n-1), k\neq n-1$ を満たす素数であり、$A_k(i),B\in\mathbb{C}$ はパラメータである。

このとき、次のことがわかる。証明は省略する。

命題 1
空間 $\Sigma(n)$ において $\mathcal{P}er_n(1;\mu)$ は $n-2$ 次元超平面をなす。

命題 2
symmetry locus $\mathcal{S}_n$ は、超平面族 $\{\mathcal{P}er_n(1;\mu)\}_\mu$ の包絡部分に含まれる。

3 射影モジュライ空間

3.1 n 次以下の多項式空間と射影モジュライ空間

射影モジュライ空間を $\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathbb{C})=\bigoplus_{k=1}^n\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$ によって定義する。n 次以下の多項式の空間 $\bigoplus_{k=1}^n\mathrm{Poly}_k(\mathbb{C})$ を $\widehat{\mathrm{Poly}}_n(\mathbb{C})$ と記す。$\widehat{\mathrm{Poly}}_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ と同型である。

ここで、n 次以下の monic で centered な多項式 $p(z)=z^k+c_{k-2}z^{k-2}+\cdots+c_0$ $(1\leq k\leq n)$ に対して $(c:c_{n-2}:\cdots:c_1:c_0)$ で座標を入れた $n-1$ 次元複素射影空間 $\widehat{\mathcal{P}}_1(n)$ を考える。ただし、座標の入れ方は次のようにする:

$$n\text{ 次のとき }(1:c_{n-2}:\cdots:c_1:c_0),\quad n-1\text{ 次のとき }(0:1:c_{n-3}:\cdots:c_1:c_0),\quad\cdots$$
$$\cdots,\quad 2\text{ 次のとき }(0:0:\cdots:0:1:1),\quad 1\text{ 次のとき }(0:0:\cdots:0:1)$$

ここで、集合 $\Sigma(n)$ の閉包が $\mathbb{C}^{n-1}$ 全体であることから $\Sigma(n)$ の自然な意味でのコンパクト化として $n-1$ 次元複素射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ をとることができる。

そこで、$\mathbb{C}^{n-1}$ の部分集合である $\mathcal{E}(n)$ や $\Sigma(n)$ に対して、写像 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-2}, \sigma_n) \mapsto (1 : \sigma_1 : \sigma_2 : \cdots : \sigma_{n-2} : \sigma_n)$ による射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ への埋め込みを $\mathcal{E}^1(n)$, $\Sigma^1(n)$ とおく。

このとき次の写像が構成できる。

定理 3

射影モジュライ空間 $\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathbb{C})$ の各点に対して、不動点の乗数の基本対称式の組 $(s_0 : s_1 : \cdots : s_{n-2} : s_n)$ を対応させる上への写像 $\widehat{\Psi}_n : \widehat{\mathrm{M}}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{CP}^{n-1}$ が構成できる。

$\widehat{\Psi}_n$ の構成は次の通りである:

$\mathbb{CP}^{n-1}$ に対して $U_0(n-1) = \left\{(s_0 : s_1 : \cdots : s_{n-2} : s_n) \in \mathbb{CP}^{n-1};\ s_0 \neq 0\right\}$ とおく。以後 $\mathbb{C}^{n-1}$ と同一視できる $U_0(n-1)$ を中心に考える。

ここで $n \geq 4$ の場合に ($n = 3$ の場合には [6] 参照のこと)、$\mathbb{CP}^{n-1}$ をアフィン部分 (affine $(n-1)$-space $\mathbb{C}^{n-1}$) と無限遠超平面 (hyperplane at infinity $\mathbb{CP}^{n-2}$) に分けて、それぞれに対応する原像 (preimage) を次で定める。

アフィン部分 (affine $(n-1)$-space) 上

$\Sigma^1(n)$ 上: 次数の落ちない n 次多項式について、$\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ から $\Sigma(n)$ への写像 Ψ_n が存在し n 次多項式のモジュライ空間における全射問題が解けている。したがって、写像 $\widehat{\Psi}_n$ の $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ への制限を、写像 Ψ_n と $(s_1, s_2, \cdots, s_{n-2}, s_n) \mapsto (1 : s_1 : s_2 : \cdots : s_{n-2} : s_n)$ の合成写像であると定めれば全射であり、逆像が存在する。

$\mathcal{E}^1(n)$ 上: Theorem (Polynomial Case) より $\mathcal{E}^1(n)$ 上では、$n-2$ 次以下の多項式の正則指数の条件が 2 つ以上満たされている。したがって、$\mathcal{E}^1(n)$ 上の各点に対する原像がそれら次数の退化した多項式の共役類すべてを集めたものであると定義すれば、写像 $\widehat{\Psi}_n$ は全射になる。

無限遠超平面 (hyperplane at infinity) 上

射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ において $U_0(n-1)$ を中心に考えたときの無限遠超平面を $H_\infty(n-2)$ とおく。$H_\infty(n-2)$ は $\mathbb{CP}^{n-2}$ と同一視できる。したがって、無限遠超平面上ではその原像が $\widehat{\mathrm{M}}_{n-1}(\mathbb{C})$ になるように再帰的に定義する。すなわち、この $H_\infty(n-2)$ に対して $U_1(n-2) = \left\{(0 : s_1 : \cdots : s_{n-2} : s_n) \in \mathbb{CP}^{n-2};\ s_1 \neq 0\right\}$ とおく。

ここで $\mathbb{C}^{n-2}$ と同一視できる $U_1(n-2)$ を中心に、上で記述したことを繰り返し考える。

最後に、一点 $H_\infty(0) = \{(0 : 0 : \cdots : 0 : 1)\}$ の原像が $\mathrm{M}_1(\mathbb{C})$ となるように定義する。

このように $\widehat{\Psi}_n$ を定めれば、$\mathbb{CP}^{n-1}$ の任意の点に対して逆像が存在するので、$\widehat{\Psi}_n$ は全射である。対応を表にまとめると表 3.1 のようになる。

3.2 射影力学曲線

ここでは、小節 2.3 で述べた力学曲線を $\mathbb{CP}^{n-1}$ 内の曲線に拡張したものについての結果のみを述べる。

代数曲線 $\mathcal{P}\mathrm{er}_n(1;\mu)$ は $\Sigma(n)$ 上で定義されているが、曲線族 $\{\mathcal{P}\mathrm{er}_n(1;\mu)\}_\mu$ の σ_i $(i = 1, \cdots, n-2, n)$ と μ に関する連続性を用いて定義方程式から $\mathbb{C}^{n-1}$ 上の代数曲線として解釈できる。したがって、この定義方程式から写像 $(s_1, s_2, \cdots, s_{n-2}, s_n) \mapsto (\frac{s_1}{s_0} : \frac{s_2}{s_0} : \cdots : \frac{s_{n-2}}{s_0} : \frac{s_n}{s_0})$ によって変換し分母を払って得られた式を定義方程式とする代数曲線を $\widehat{\mathcal{P}\mathrm{er}}_n(1;\mu)$ と書く。

<table>
<tr><td rowspan="6">$\mathbb{CP}^{n-1}$</td><td rowspan="2">アフィン n-空間
$U_0(n-1)$</td><td>$\Sigma^1(n)$</td><td colspan="3">n 次多項式の共役類が対応</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{E}^1(n)$</td><td colspan="3">次数が $n-2$ 以下の多項式の共役類が 2 組以上対応</td></tr>
<tr><td rowspan="4">無限遠超平面
$H_\infty(n-2)$
$=\mathbb{CP}^{n-2}$</td><td rowspan="2">アフィン
$(n-1)$-空間
$U_1(n-2)$</td><td>$\Sigma^1(n-1)$</td><td colspan="2">$n-1$ 次多項式の共役類が対応</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{E}^1(n)$</td><td colspan="2">次数が $n-3$ 以下の多項式の
共役類が 2 組以上対応</td></tr>
<tr><td rowspan="2">無限遠超平面
$H_\infty(n-3)$
$=\mathbb{CP}^{n-3}$</td><td>アフィン
$(n-2)$-空間</td><td colspan="2">$\cdots$</td></tr>
<tr><td>無限遠超平面</td><td colspan="2">$\cdots$</td></tr>
</table>

表 1: 射影 $\widehat{\Psi}_n$ の構成

このとき $\widehat{\mathcal{P}\mathrm{er}}_n(1;\mu)$ は $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上でうまく定義された "等乗数" 曲線であるという次の定理を得る。証明は省略する。

定理 4
代数曲線 $\widehat{\mathcal{P}\mathrm{er}}_n(1;\mu)$ は、空間 $\widehat{\Psi}_n(\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathbb{C}))$, $(=\mathbb{CP}^{n-1})$ 上の力学曲線 $\mathcal{P}\mathrm{er}_{\widehat{\Psi}_n(\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathbb{C}))}(1;\mu)$ に一致する。

参 考 文 献

[1] Fujimura, M. and Nishizawa, K.: Moduli spaces and symmetry loci of polynomial maps, *Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, (Küchlin, W., ed.), ACM, 1997, 342–348.

[2] Fujimura, M.: Moduli Space of Polynomial Maps: Surjective Problem, in preparation.

[3] Fujimura, M.: Moduli spaces of maps with two critical points, *RIMS Kokyuroku 988: Some Problems in Complex Dynamical Systems*, (Morosawa, S., ed.), 1997, 57–66.

[4] Milnor, J.: Geometry and Dynamics of Quadratic Rational Maps, *Experimental Mathematics*, 2(1), 1993, 37–83.

[5] Nishizawa, K. and Fujimura, M.: Moduli space of polynomial maps with degree four, *Josai Information Sciences Researchers*, 9, 1998, 1–10.

[6] Nishizawa, K. and Fujimura, M.: Projective Moduli Space of Polynomials: Cubic Case, *Josai Mathematical Monographs*, 2, 2000, 1–10.