数式処理 *Bulletin of JSSAC(2025)*
Vol. 31, No. 2, pp. 33 - 40

特集論文

円内接五・六角形の面積公式の基礎的消去計算のみによる導出について*

森継 修一†

筑波大学 図書館情報メディア系

(Received October 11, 2024　　Accepted January 17, 2025)

概　要

In this paper, we have clarified a method for deriving area formulas for inscribed pentagons and hexagons from the classic results of Brahmagupta for cyclic quadrilateral, using only basic elimination calculations by resultant. In this process, applying "Key Lemma" by Svrtan (2010) led to improved computational efficiency compared with the method of the author's previous paper (2015), where only the elimination by resultant is also applied. Other than calculating resultant once at the final step to eliminate an auxiliary variable, we need only basic polynomial and rational expression operations. Therefore, when it is implemented on a computer algebra system, this algorithm will have a good prospect, compared with the formulation by Robbins (1994).

1　序

本研究では，ユークリッド幾何の古典的な問題である円内接多角形問題を扱う．すなわち，円に内接する n 角形の各辺の長さを $a_1, a_2, \ldots, a_n$ としたとき，n 角形の面積 S，外接円の半径 R，さらに R と S の関係を辺長 a_i の式で表わせ，という問題である．

古典的には，$n = 3$ の場合の Heron の公式 (1 世紀)，$n = 4$ の場合の Brahmagupta の公式 (7 世紀) が知られているが，$n = 5$ の場合の面積公式は，Robbins[5] が 1994 年に定式化するまで発見されなかった．その方法は，本稿の補遺に示すように，複素平面上に座標をとることを出発点とし，辺長による表現である Brahmagupta の公式の拡張とは全く異なるアプローチであった．

これに対し本研究は，辺長の関係を記述した Brahmagupta の公式を基本とし，終結式を利用した「基礎的消去計算」のみで，「$n = 5, 6$ に対する面積公式」を求めることを目的とする．基礎として用いるのは，以下の形の円内接四辺形に関する面積公式と半径公式である．

$$S = \frac{\sqrt{(-a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3-a_4)}}{4} \tag{1}$$

*本研究は科研費 (21K03335) の助成を受けている．
†moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

$$R = \sqrt{\frac{(a_1a_2 + a_3a_4)(a_1a_3 + a_2a_4)(a_1a_4 + a_2a_3)}{(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)}} \tag{2}$$

筆者の前論文 [2] においても,「辺長の関係式 (1)(2) のみを用いて,終結式による消去計算で $n = 5, 6$ に対する面積公式を求めること」自体には成功していた.ただし,終結式の計算結果に含まれる冗長な因子を取り除く必要があり,巨大な多変数多項式の因数分解のために大きな CPU 時間を取られていて,効率上問題となっていた.

これに対し,Svrtan[6] は,同様に辺長の関係から Brahmagupta の公式の拡張に取り組んでいて,その中でも「Key Lemma」とよぶ新たな関係式を見出すことにより,$n = 5$ の面積公式の導出法を記述している.ただし,Svrtan[6] はスライド資料であり,論文の形ではあらためて発行されていないようである.さらに,円内接四辺形において成り立つ各種の関係式を多数列挙し,中間結果を次々と別な変数に置き換えて表現しているため,実際に数式処理システム上で実装するには参考としづらい面がある.

そこで本研究では,前論文 [2] で示したアプローチに,Svrtan の「Key Lemma」を組み合わせたアルゴリズムを考案した.その結果,より簡潔な関係式を基に消去計算を行うことになるため,因数分解が不要になって計算時間が大幅に短縮されることが判明した.

本稿で示す導出法は,先行する論文 [6] [2] の組み合わせから導き出せるアルゴリズムではあるが,読者が容易に再現できるように,簡潔に整理して記述しておくことは有用であると考える.

2 古典的な結果 ($n = 3, 4$)

三辺の長さを a_1, a_2, a_3 とする三角形の面積 S は,Heron の公式から次の関係をみたす.

$$(4S)^2 = (a_1 + a_2 + a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3) \tag{3}$$

ここで,$X = (4S)^2$ とおくと,式 (3) は a_i^2 に関する 3 次の基本対称式 $s_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $s_2 = a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2$, $s_3 = a_1^2a_2^2a_3^2$ を用いて,以下のように書き換えられる.

$$X - (-s_1^2 + 4s_2) = 0 \tag{4}$$

次に,円内接四角形の面積に関しては,Brahmagupta の面積公式 (1) から

$$(4S)^2 = (-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4) \tag{5}$$

と表される.ここで,a_i^2 に関する 4 次の基本対称式 $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_4^2$, $s_2 = a_1^2a_2^2 + \cdots$, $s_3 = a_1^2a_2^2a_3^2 + \cdots$, $\sqrt{s_4} = a_1a_2a_3a_4$ を用いると,次のような簡潔な表現が得られる.

$$X - (-s_1^2 + 4s_2 + 8\sqrt{s_4}) = 0 \tag{6}$$

なお,式 (5) は凸四角形の場合を表しているので,凸でない場合には,$a_4 := -a_4$ とおいた式を求め,基本対称式表現に変換すると次のように表される.

$$X - (-s_1^2 + 4s_2 - 8\sqrt{s_4}) = 0 \tag{7}$$

すなわち，n が偶数の場合の補助的な表現 $\sqrt{s_n} = a_1 \cdots a_n$ の係数に *crossing parity* ε [5][1] を導入し，$\varepsilon = 0$ (三角形), 1 (凸四角形), -1 (凸でない四角形) に対応させると，統一した表現が得られる．

定理 1

式 (4) (6) (7) をまとめて，$n = 3, 4$ の場合の面積公式は，以下のような多項式で表現される．

$$G_{3,4}(X) = X - (-s_1^2 + 4s_2 + 8 \cdot \varepsilon \sqrt{s_4}) \tag{8}$$

このとき，基本対称式の間には，$s_3^{(3)} = s_3^{(4)} |_{a_4=0}$ などの関係があるため，$\varepsilon = 0, \pm 1$ に対応させて記法は意図的に混用されている．以後，文脈上明らかな場合は，変数の個数 n を省略して，$s_i^{(n)}$ を単に s_i で表すことにする．

3　面積公式 ($n = 5, 6$) の再計算

3.1　Svrtan の Key Lemma

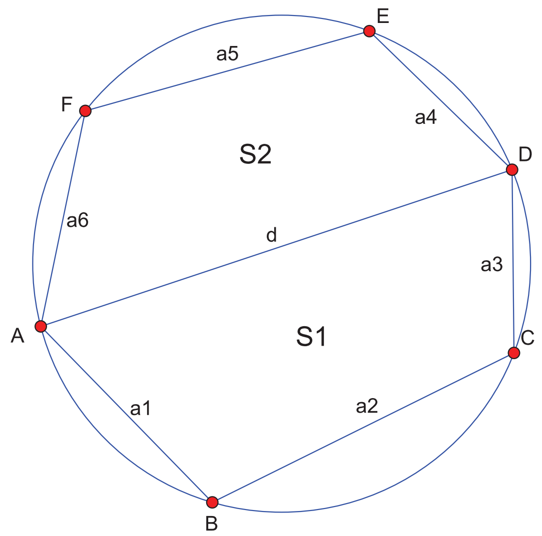

図 1: Svrtan[6] の「Key Lemma」

Svrtan[6] は，本稿と同じく，「Brahmagupta の公式 ($n = 4$) を基礎として，$n = 5, 6$ の場合の面積公式を導くこと」を目的としている．その中では，Brahmagupta の公式以外にも，円内接四角形において成り立つ多数の関係式を列挙しているが，本質的に計算効率を決定しているのは，以下に示す「Key Lemma」とよばれる関係式である．ここでは，後の議論に適用しやすいように，独自に整理した形で示しておく．

Brahmagupta の面積公式 (5) は，辺の長さを $\{a, b, c, d\}$ として右辺を展開すると

$$16S^2 = 2\left(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2\right) - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 8abcd \tag{9}$$

と表わされる．ここで，右辺を d の関数とみなして $G(d)$ で表し，d で微分して，$g(a, b, c;\ d) = G'(d)/4$ とおく．

$$g(a, b, c;\ d) = -d^3 + (a^2 + b^2 + c^2)d + 2abc \tag{10}$$

一方で，円内接六角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ を対角線 d により 2 つの円内接四角形 $\{a_1, a_2, a_3, d\}$ と $\{a_4, a_5, a_6, d\}$ とに分割し，それぞれの面積を S_1, S_2 とおく (図 1)．このとき，

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_4, a_5, a_6;\ d)}{g(a_1, a_2, a_3;\ d)} \tag{11}$$

が成り立つ，というのが Svrtan[6] の「Key Lemma」である．すなわち，式 (9) を用いて S_2^2/S_1^2 を表すより，この方が簡潔な表現が得られるため，以後の計算の効率化が可能になる．

Svrtan[6] の原著では，式 (11) の分母を払って移項し，多項式で表現されている．また，その導出には，初等幾何的な線分の長さの関係だけが用いられているが，導関数の形をしていることについての言及はない．なお，Brahmagupta の面積公式 (9) は $a = 0$ を代入すれば三角形 $\{b, c, d\}$ の面積を表すため，式 (11) は円内接五角形を四角形＋三角形に分割した場合でも成立する．

注意 2

筆者の先行論文 [3] では，式 (11) を「New Brahmagupta 公式」とよんでいるが，原資料 [6] では単に「Key Lemma」とよんでいる（「New Brahmagupta 公式」は別の表現式を指している）ので，本稿においても式 (11) の名称は「Key Lemma」で統一することにする．

3.2 面積公式 ($n = 5, 6$) の計算への適用

筆者の前論文 [3] においては，「面積 × 半径」公式 ($Z = (4SR)^2$ を主変数とする 7 次式) の導出に Svrtan の「Key Lemma」を適用する方法を論じた．ここで議論する面積公式 ($X = (4S)^2$ を主変数とする) の場合も，「Key Lemma」の適用部分は類似の導出過程となった．

以前の論文 [2] では，終結式による消去のみで面積公式 ($n = 5, 6$) を導く方法を明らかにしたが，そこでは，終結式に含まれる余計な因子を除去するため，巨大な多変数多項式の因数分解が必要であり，CPU 時間の多くを取られていた．結果は，辺長 a_i の表現で，6,672 項 ($n = 5$) と 30,192 項 ($n = 6$) であり，これらを基本対称式表現に直せば，*crossing parity* ε を用いて統一的に表現することが可能になる．

$$\begin{aligned} G_{5,6}(X) \quad = \quad & X^7 + (7s_1^2 - 24s_2)X^6 \\ & + \left(21s_1^4 - 144s_1^2 s_2 + 16s_1s_3 + 240s_2^2 - 192s_4 - 416s_1 \cdot \varepsilon\sqrt{s_6}\right)X^5 \\ & + \quad \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (282\text{ 項}) \end{aligned} \tag{12}$$

ただし，$\varepsilon = 0$ は五角形の場合，$\varepsilon = 1$ は凸六角形を含むグループ，$\varepsilon = -1$ は凸な場合を含まないグループに対応している．

次節において，「Svrtan の Key Lemma」(11) を用いると，より効率的に，多項式の因数分解なしで上記の結果が得られることを示す．そのためには，「凸六角形 ($\varepsilon = 1$) の場合」のみ計算すれば十分である．

3.3 円内接六角形の面積公式の導出

図 1 において，面積 S の円内接六角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ を対角線 d により，

$$\text{四角形}\{a_1, a_2, a_3, d\} \ + \ \text{四角形}\{a_4, a_5, a_6, d\} \tag{13}$$

と分割したとする．このとき，それぞれの面積を S_1, S_2 とおくと，$S = S_1 + S_2$ である．また，これらの図形はひとつの外接円を共通にもつので，その半径を R とおく．

このとき，式 (11) を用いて，面積比を

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{g(a_4, a_5, a_6;\ d)}{g(a_1, a_2, a_3;\ d)} = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{14}$$

と略記する．$S_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha} S_2$ を $S^2 = S_1^2 + 2S_1S_2 + S_2^2$ の第 2 項のみに代入すると

$$S^2 = S_1^2 + 2\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) S_2^2 + S_2^2 \tag{15}$$

両辺に $\alpha \cdot 4^2$ をかけると

$$\alpha(4S)^2 = \alpha(4S_1)^2 + (\alpha - 2\beta)\,(4S_2)^2 \tag{16}$$

ここで，Brahmagupta の面積公式 (5) より，

$$\begin{cases} (4S_1)^2 &= (-a_1 + a_2 + a_3 + d)(a_1 - a_2 + a_3 + d)(a_1 + a_2 - a_3 + d)(a_1 + a_2 + a_3 - d) \\ (4S_2)^2 &= (-a_4 + a_5 + a_6 + d)(a_4 - a_5 + a_6 + d)(a_4 + a_5 - a_6 + d)(a_4 + a_5 + a_6 - d) \end{cases} \tag{17}$$

と表されることに注意する．したがって，円内接六角形において $X = (4S)^2$ とおいたとき，

$$\begin{aligned} f_0(a_i, d, X) &= \alpha X - \alpha(4S_1)^2 - (\alpha - 2\beta)(4S_2)^2 \\ &\qquad (\alpha, \beta, S_1, S_2, \in \mathbf{Z}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d]) \end{aligned} \tag{18}$$

という形で，$X = (4S)^2$ の定義多項式が 1 次式 (展開すると 99 項，d に関しては 7 次) で表せる．

一方で，$f_0(a_i, d, X)$ から対角線 d を消去するためには，$\mathbf{Z}[a_i, d]$ に属する独立な多項式が必要である．これには，分割でできた 2 つの四角形に Brahmagupta の半径公式 (2) を適用した式を基本とする．円内接四角形 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ の外接円半径 R は，

$$R^2 = \frac{(a_1a_2 + a_3a_4)(a_1a_3 + a_2a_4)(a_1a_4 + a_2a_3)}{(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 - a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 - a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3 - a_4)} \tag{19}$$

と表される．この有理式から，分母を払ってカッコを展開した多項式表現で考えると，ふたつの四角形は以下をみたしていることがわかる．

$$\begin{aligned} f_1(a_1, a_2, a_3, d, R) &= \left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + d^4 + \cdots\right) R^2 + \left(a_1^2a_2^2a_3^2 + a_1^2a_2^2d^2 + a_1^2a_3^2d^2 + a_2^2a_3^2d^2 + \cdots\right) \\ f_2(a_4, a_5, a_6, d, R) &= \left(a_4^4 + a_5^4 + a_6^4 + d^4 + \cdots\right) R^2 + \left(a_4^2a_5^2a_6^2 + a_4^2a_5^2d^2 + a_4^2a_6^2d^2 + a_5^2a_6^2d^2 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{20}$$

これらは外接円半径 R^2 が共通なので，主係数を打ち消すように引き算して消去し，d の定義多項式とみなして整理すると，

$$h(a_1, \ldots, a_6, d) := (a_1a_2a_3 - a_4a_5a_6)\, d^7 + \left(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2 - a_4^2a_5^2 - a_5^2a_6^2 - a_6^2a_4^2\right) d^6 + \cdots \tag{21}$$

という 150 項の 7 次式が得られる．

最後に，$\{f_0, h\}$ の組み合わせから終結式 (7 次 ×7 次) によって d を消去し，Content Part を除去すると，次のような X に関する 7 次式を得る．

$$\mathrm{PrimitivePart}_X\,(\mathrm{Res}_d\,(f_0,h)) \;=\; 1\cdot X^7 + \Big(7(a_1^4+\cdots+a_6^4) - 10(a_1^2a_2^2+\cdots+a_5^2a_6^2)\Big)X^6 + \cdots \quad (30,192\ 項) \tag{22}$$

これは，基本対称式表現の式 (12) における $G_{5,6}(X)\,|_{\varepsilon=1}$ を，辺長による表現 $\mathbf{Z}[a_1,\ldots,a_6,X]$ に展開したものであることが確かめられる．

現在の実行環境は，Maple2024 (Windows11), Xeon W-2225 (4.10GHz), 256GB-RAM であり，式 (22) の計算に要する CPU 時間は約 60 秒である．筆者の以前の論文 [2] の方法では，同じ環境で因数分解に約 2 時間の CPU 時間を必要とするため，Key Lemma (11) の適用により計算効率が大幅に改善されたことが明らかになった．

4　まとめと今後の課題

本稿では，Brahmagupta の面積公式と半径公式から，終結式による基礎的消去計算のみで，円内接五・六角形の面積公式 (22) を導出する方法を明らかにした．その際，Svrtan[6] による「Key Lemma」を適用したことが，筆者自身の前論文 [2] の方法に比べ，計算効率の向上につながった．これは，終結式に含まれる余計な因子を排除するための因数分解が不要になったことによっている．

以上の過程で，計算の基礎として使用した関係式は，式 (1)(2)(11) のみである．最後に 1 回だけ終結式を計算して補助的変数を消去する以外は，基礎的な多項式・有理式の操作だけで実行できるように整理したので，数式処理システム上で再現・検証する場合でも見通しの良いアルゴリズムになっていると考える．

今後の課題としては，辺数を増やして，「円内接八角形を隣接する 2 つの円内接五角形に分割した場合」への拡張が考えられる．ただし，五角形の面積公式は，$X(=16S^2)$ についての 7 次方程式となるため，これを陽に解くことはできない．したがって，Brahmagupta の面積公式と同様の「Key Lemma」が存在するかどうか，不明である．

A　Robbins による面積公式の導出

比較のため，Robbins[5] による定式化の導入と結論の部分の抜粋を引用する．議論を詳細化した Maley[1] も含めて，本稿のような「Brahmagupta の公式の拡張」とは全く異なるアプローチを取っている．

複素平面上で，原点を中心とする半径 R の円周上に n 個の点 $v_1,\ldots,v_n$ をこの順にとる．$v_{n+1}=v_1$，$q_j = v_{j+1}/v_j$ $(j=1,\ldots,n)$ とおくと，各辺の長さは

$$a_j^2 = |v_{j+1}-v_j|^2 = (v_{j+1}-v_j)(\bar{v}_{j+1}-\bar{v}_j) \tag{23}$$

と表される．ここで $|v_k|^2 = v_k\bar{v}_k = R^2$ より $\bar{v}_k = R^2/v_k$，よって

$$\begin{aligned} a_j^2 &= (v_{j+1} - v_j)R^2\left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right) \\ &= R^2\left(2 - \frac{v_{j+1}}{v_j} - \frac{v_j}{v_{j+1}}\right) = R^2\left(2 - q_j - q_j^{-1}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

と変形できる．

一方で，原点 ,α,β を頂点とする三角形の面積について，

$$S = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta})\right| = \frac{1}{4}\left|\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta\right|, \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \tag{25}$$

より，

$$S_j = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{v}_j v_{j+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{R^2}{v_j}v_{j+1}\right) = \frac{R^2}{4i}\left(\frac{v_{j+1}}{v_j} - \frac{v_j}{v_{j+1}}\right) \tag{26}$$

と表すことができる．n 個の三角形を足し合わせて，n 角形の面積を考えると，

$$\begin{aligned} -16S^2 &= R^4\left(\frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2} + \cdots\right)^2 = R^4\left(q_1 + \cdots + q_n - q_1^{-1} - \cdots - q_n^{-1}\right)^2 \\ &= R^4\left((q_1 + \cdots + q_n) - \frac{q_1\cdots q_{n-1} + \cdots}{q_1\cdots q_n}\right)^2 = R^4(\tau_1 - \tau_{n-1})^2 \end{aligned} \tag{27}$$

という形で，面積 S を表せることがわかる．ここで，$\tau_1, \ldots, \tau_n$ は $q_1, \ldots, q_n$ の基本対称式である．このとき，

$$\tau_n = q_1\cdots q_n = \frac{v_2}{v_1}\cdots\frac{v_1}{v_n} = 1 \tag{28}$$

に注意する．さらに，対称式 τ_j と，対称式 $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$，…，$s_n = a_1^2\cdots a_n^2$ との関係を導く [4].（ここまでは，一般の n について立式が可能である.）

最終的に，面積に関する Robbins の公式 ($n = 5, 6$) は，$s_1, \ldots, s_6$ を a_i^2 に関する 6 次の基本対称式，$u_2 = -4S^2$ として，以下の構成による．

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 \\ t_2 &= -s_2 + t_1^2/4 - u_2 \\ t_3 &= s_3 + t_1t_2/2 - \varepsilon\cdot 2\sqrt{s_6} \\ t_4 &= -s_4 + t_2^2/4 + \varepsilon\cdot t_1\sqrt{s_6} \\ t_5 &= s_5 + \varepsilon\cdot t_2\sqrt{s_6} \end{aligned} \tag{29}$$

このとき，3 次多項式 $u_2 + t_3z + t_4z^2 + t_5z^3$ が重根をもち，その判別式から

$$t_3^2t_4^2 - 4u_2t_4^3 - 4t_3^3t_5 + 18u_2t_3t_4t_5 - 27u_2^2t_5^2 = 0 \tag{30}$$

という u_2 に関する 7 次方程式 (12) を得る．ただし，crossing parity ε の値は，0 (五角形)・+1 (凸六角形) ・−1 (非凸六角形) をとるものとする．

Robbins[5] は，多数の数値例から補間によって各項の係数を求めたが，式 (29) の導出を再現することは困難と思われ，多分に天下り的である．したがって，「本稿のような初等幾何的なアプローチで $n = 5, 6$ に対する公式が導けるのか」を追求することも，研究課題として意義があると考えられる．

参考文献

[1] Maley, F. M., Robbins, D. P., and Roskies, J.: On the Areas of Cyclic and Semicyclic Polygons, *Advances in Applied Mathematics*, **34**(4), 2005, 669–689.

[2] 森継修一: 円内接多角形問題における面積公式・半径公式・統合公式について, 京都大学数理解析研究所講究録, **1955**, 2015, 91–101.

[3] 森継修一: Svrtan による new Brahmagupta's formula の円内接多角形問題への適用について, 京都大学数理解析研究所講究録, **2224**, 2022, 103–113.

[4] 森継修一: 円内接多角形問題について- 複素平面上の対称式の利用, 京都大学数理解析研究所講究録, **2280**, 2024, 78–86.

[5] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.

[6] Svrtan, D.: Intrinsic Geometry of Cyclic Heptagons / Octagons via new Brahmagupta's Formula, https://bib.irb.hr/datoteka/553883.main.pdf, 2010.