

ルービックキューブの FULRD 問題

塩田 朝未

山岸 義和*

龍谷大学理工学部

龍谷大学理工学部

(Received 2016/12/27 Revised 2017/10/10 Accepted 2017/12/6)

概 要

ルービックキューブにおいて、一面を回さず、残りの五面の回転だけを用いて完成させる問題を考える。このような制限下における実際的な解法手順を示す。

1 はじめに

ルービックキューブは、1974年に Ernő Rubik が開発した回転式立体パズルである。キューブの前面を F、上面を U、左面を L、右面を R、下面を D、背面を B で表す。各面を時計回りに 90 度回転させる操作を、同じ文字でそれぞれ F, U, L, R, D, B で表す。また、各面を反時計回りに 90 度回転させる操作は、それぞれ F', U', L', R', D', B' で表す。各面を 180 度回転させる操作は、それぞれ $F2, U2, L2, R2, D2, B2$ で表すのが慣例のようである。このような立方体の六面の回転によって生成される群がルービックキューブ群

$$G = \langle F, U, L, R, D, B \rangle$$

である。

時計回り 90 度回転、反時計回り 90 度回転、180 度回転のいずれも一手とする数え方を FTM (Face Turn Metric) という。180 度回転を二手とする数え方は QTM (Quarter Turn Metric) という。FTM では最長 20 手、QTM では最長 26 手で、すべての配置が解けることが 2010 年に示された [5]。藤本・泊 [2] は、数式処理ソフトウェア GAP, Sage を用いて、素数位数を持つ操作を探索している。

ルービックキューブを解く場合、通常は、六つの面を回転させて解く。しかし、かりに一面が回転できなくても、残りの五面の回転だけを使って解くことは可能である。このことは、一部の専門家の間では古くから知られていた [1]。すなわち、たとえば

$$G = \langle F, U, L, R, D \rangle$$

*yg@rins.ryukoku.ac.jp

である．実際， B は F, U, L, R, D の回転 13 手で

$$B = RL'U2D2RL'FRL'U2D2RL'$$

と代替できる [1]．

なお，四面の回転だけではすべてのキューブを解くことはできない．たとえば L, R, D, B の回転だけでは，上面と前面に会した辺（あとで UF と表す）の位置にあるピースは動かさないからである．

五面の回転だけを用いてキューブを完成させる問題を，FULRD 問題と呼びたい．理論上は，六面の回転を使った解法の中で，すべての B を上記の 13 手に置換えれば，五面の回転による解法が得られたことになる．しかし，これでは手数も長く，実践的でもない．本論文では，五面の回転だけを使うという制限下での実践的解法を二つ示す．第一は，下面の回転 (D) を使わず残りの五面 ($FULRB$) の回転だけを使うという条件で，下段，中段，上段の順に完成させる LBL (layer by layer) 法である．第二は，上面の回転 (U) を使わず残りの五面 ($FBLRD$) の回転だけを使うという条件で，下段，中段，上段の順に完成させる LBL 法である．

通常の LBL 法については，百田 [3]，メガハウス [4] に詳しい．

2 FULRB 制限下での LBL 法

大きさ $3 \times 3 \times 3$ のルービックキューブは，8 個の隅ピースと 12 個の辺ピースを持つ．辺ピースの位置を，その辺が会する二つの面の記号で表すことにする．たとえば上面と前面に会した辺を UF と表す．隅のピースの位置は，その頂点が会する三つの面の記号で表すことにする．たとえば上左前隅を ULF で表す．三つの面は反時計回りに並べる．

キューブの回転による一連の操作は，ピースの置換で表される．たとえば上面の回転 U は，巡回置換ふうの表記法で

$$U : (UF, UL, UB, UR) (UFR, ULF, UBL, URB)$$

と表すことができる．前半の (UF, UL, UB, UR) は， UF 辺にあったピースが (向きを込めて) UL 辺に移り， UL 辺が UB 辺に移り， UB 辺が UR 辺に移り，最後に UR 辺が UF 辺に移ることを表す．

いま，下面の回転 $D, D', D2$ が使えないとして，残りの五面の回転 F, U, L, R, B を用いて下段，中段，上段の順に完成させる LBL 法を考える．上面が白とする．

2.1 下段，中段

まず，下段の四辺 DF, DL, DR, DB および四隅 DRF, DFL, DLB, DBR を完成させることは難しくない．中段の辺は， RF, FL, LB, BR の 4 箇所がある．これを揃えるために，

$$U'L'ULUFU'F' : (UF, LF, BU, LU, UR) (URB, UBL, FRU)$$

という操作を考えると， UF 辺にあるピースが LF 辺に移動し，その際，残りの中段の辺および下段は影響を受けない．操作

$$U'B'UBULU'L' : (UL, BL, RU, BU, UF) (UFR, URB, LFU)$$

$$U'RURUBU'B' : (UB, RB, FU, RU, UL) (ULF, UFR, BLU)$$

$$U'F'UFURU'R' : (UR, FR, LU, FU, UB) (UBL, ULF, RBU)$$

は，他の三つの中段の辺への移動を与える．これらと鏡映対称な操作

$$URU'R'U'F'UF : (UF, RF, BU, RU, UL) (ULB, UBR, FLU)$$

$$UFU'F'U'L'UL : (UL, FL, RU, FU, UB) (UBR, URF, LBU)$$

$$ULU'L'U'B'UB : (UB, LB, FU, LU, UR) (URF, UFL, BRU)$$

$$UBU'B'U'R'UR : (UR, BR, LU, BU, UF) (UFL, ULB, RFU)$$

および操作 U を組み合わせて，中段の四辺を完成させることができる．

2.2 上段

上段は，通常の LBL 法と同様，四辺の向き，四隅の向き，四隅の位置，四辺の位置の順に揃える．上段の四辺および四隅のピースの向きづけとしては，回転 U で向きが保たれるように向きづけを与えて考える．

2.2.1 上段の四辺の向き

下段および中段が揃った状態を仮定すると，上段の四辺のうち，白面が上を向いているピースは偶数個，すなわち，0 個，2 個，あるいは 4 個全部である [6]．まず操作

$$FRUR'U'F' : (UR, UB, FU) (URB, UBL)_- (UFR, ULF)_+ \quad (1)$$

で，UR 辺が UB 辺に移り，UB 辺が FU 辺に移り，FU 辺が UR 辺に移る．また，URB 隅が UBL 隅に移り，UBL 隅が RBU 隅に移る．括弧の右下にマイナス記号 $()_-$ をつけたのは，UBL 隅が，URB 隅から反時計回りに 120 度回転した RBU 隅に移ったことを表す．そして UFR 隅が ULF 隅に移り，ULF 隅が RUF 隅に移る．括弧の右下にプラス記号 $()_+$ をつけたのは，ULF 隅が，UFR 隅から時計回りに 120 度回転した RUF 隅に移ったことを表す．(ルービックキューブの慣例では，時計回りがプラス，反時計回りがマイナスである．)

この操作で，上段の辺ピース UL は動かず，UR は位置を変えるが向きは保ち，UF, UB は向きを反転させて位置を変える．操作 (1) と上面の回転 U を組み合わせて，上段の四辺の全てについて白が上面を向くようにできる．

2.2.2 上段の四隅の向き

上段の四隅 ULF, UFR, URB, UBL の向きは，白が上面を向いている状態を基準として，ずれていない，時計回りに 120 度ずれている，反時計回りに 120 度ずれている，のいずれかである．上段の四隅において，時計回りにずれたピースの個数から，反時計回りにずれたピースの個数を引いた差は 0 個，3 個，-3 個のいずれかである [6]．操作

$$RU2R'U'RUR' : (UL, UB, UR) (UFR, BLU)_+ (URB, ULF)_- \quad (2)$$

で、四辺と隅ピース URB は向きを変えず、UBL, ULF, UFR の 3 つは向きが反時計回りに 120 度回転する。操作 (2) と上面の回転 U を組み合わせて、上段のすべてのピースで白が上面を向くようにできる。

2.2.3 上段の四隅の位置

操作

$$RUR'U'R'FR2U'R'U'RUR'F' : (UL, UR)(UFR, URB) \quad (3)$$

は、上段の全ピースの向きを変えずに二隅 UFR, URB の互換を与える。操作 (3) と上面の回転 U を組み合わせて、上段の四隅のピースの位置を揃えることができる。

2.2.4 上段の四辺の位置

隅のピースの位置が揃ってしまえば、辺のピースの配置は偶置換となる [6]。操作

$$R2URUR'U'R'U'R'UR' : (UL, UR, UF) \quad (4)$$

あるいは

$$F2UR'LF2RL'UF2 : (UL, UR, UF) \quad ([6] \text{ 参照})$$

で、辺のみの巡回置換を与える。操作 (4) と上面の回転 U を組み合わせて、上段の辺ピースの位置が揃う。以上で、回転 $D, D', D2$ を使わずにキューブを完成させることができる。

3 $FBLRD$ 制限下での LBL 法

次に、上面の回転 $U, U', U2$ が使えないとして、残りの五面の回転 F, B, L, R, D を用いて下段、中段、上段の順に完成させる LBL 法を考える。上面が白とする。

3.1 下段

下段の四辺 DF, DL, DR, DB の位置と向きを揃えることは、それほど難しくない。下段の四隅については、操作

$$R'FRF' : (UFR, FDR)_{-}(ULF, RBU)_{+}(UF, RU, RF) \quad (5)$$

で、上前右隅と前下右隅の位置が交換され、下段の他のピースは影響を受けない。操作 (5) を 2 回繰り返すと、

$$R'FRF'R'FRF' : (DRF, RFD)(UFR, FRU)(ULF, FUL)(URB, BUR)(UF, RF, RU)$$

で、前下右隅、上前右隅は 120 度回転する。 $R'FRF', F'LF'L', L'BLB', B'RBR'$ および D を組み合わせて、下段の四隅のピースの位置と向きを揃えることができる。

3.2 中段

まず、回転 U を使わずに上面のピースの位置を移動させる操作として、

$$w := R2L2D'RL'F2R'LD'R2L2 : (UF, UL, UR) \quad (6)$$

は，上面の3つの辺ピースの位置に関する巡回置換である．

これの前後にたとえば R, R' を加えて

$$RwR' = R' L2D' RL' F2R' LD' R2L2R' : (UF, UL, FR)$$

を考えれば，上段 UL の辺ピースを中段 FR に入れることができる．これと同様の操作と，上面の辺ピースの置換を組み合わせると，中段の辺ピースの位置と向きを揃えることができる．

また，操作

$$R' FR' F' R' F' R' FRFR2 : (UF, RF, LF)$$

による中段および上段の辺ピースの置換を利用してもよい．

3.3 上段

今回は，通常の LBL 法と違い，上段の四辺の向き，四隅の向きを揃えた後，四辺の位置，四隅の位置の順に揃える．

3.3.1 上段の四辺の向き

操作

$$RB'R2FR2BR2F'R : (UF, UB, RU) (ULF, RBU) (UFR, BLU)$$

で，UF 辺が UB 辺に移り，UB 辺が RU 辺に移り，RU 辺が UF 辺に移る．この操作で，上段の辺ピース UL は動かず，UF は位置を変えるが向きは保ち，UB, UR は向きを反転させて位置を変える．操作

$$FB'F2LF2RF2L'F : (UB, UR, FU) (UBL, FRU) (ULF, RBU)$$

$$LR'L2BL2FL2B'L : (UR, UF, LU) (URB, LFU) (UBL, FRU)$$

$$BF'B2RB2LB2R'B : (UF, UL, BU) (UFR, BLU) (URB, LFU)$$

も同様である．これと操作 (6) を組み合わせると，上段の4つの辺ピースの全てについて白が上面を向くようにできる．

3.3.2 上段の四隅の向き

操作

$$LFRF'L'FR'F' = B'RBL'B'R'BL : (ULF, UFR, BLU)$$

で，3つの隅ピースが位置を変えるが，このうち ULF は向きを変えず，UFR は反時計回りに 120 度回転し，UBL は時計回りに 120 度回転する．これと同様の操作

$$BLFL'B'LF'L' = R'FRB'R'F'RB : (UBL, ULF, RBU)$$

$$RBLB'R'BL'B' = F'LFR'F'L'FR : (URB, UBL, FRU)$$

$$FRBR'F'RB'R' = L'BLF'L'B'LF : (UFR, URB, LFU)$$

および，鏡映反転させた操作

$$R'F'L'FRF'LF = BL'B'RBLB'R' : (UFR, ULF, BUR)$$

$$B'R'F'RBR'FR = LF'L'BLFL'B' : (URB, UFR, LUB)$$

$$L'B'R'BLB'RB = FR'F'LFRF'L' : (UBL, URB, FUL)$$

$$F'L'B'LF'L'BL = RB'R'FRBR'F' : (ULF, UBL, RUF)$$

と，それらの逆操作を組み合わせることによって，上段のすべてのピースで白が上面を向くようにできる．

3.3.3 上段の四辺の位置

操作

$$LFR'F'R'DR2F'R'F'RFR'D'RL' : (UR, UL)(UFR, URB)$$

および

$$BLF'L'F'DF2L'F'L'FLF'D'FB' : (UF, UB)(ULF, UFR)$$

は上段の辺ピースの向きを変えない互換を与える．これと操作 (6) を組み合わせて，上段の四辺の位置を揃えることができる．

3.3.4 上段の四隅の位置

操作

$$F2L2F'R'FL2F'RF' : (ULF, UBL, UFR)$$

および

$$L2B2L'F'LB2L'FL' : (UBL, URB, ULF)$$

$$B2R2B'L'BR2B'LB' : (URB, UFR, UBL)$$

$$R2F2R'B'RF2R'BR' : (UFR, ULF, URB)$$

は，上段の三隅の向きを変えない巡回置換を与える．これらと，その逆操作を組み合わせると，上段の四隅のピースの位置を揃えることができる．

以上で，回転 $U, U', U2$ を使わずにキューブを完成させることができる．

4 おわりに

FULRD 問題に興味を持たれなかった理由は，FULRD 条件をみただけで実際的な解法が開発されなかったためではないかと推察される．はじめから一面の回転を固定したキューブを使って，時間計測競技などもできそうである．研究上は，FULRD 条件下での最短手数の上限 (God's number) の評価を与えること，最短手数を探索するプログラムを開発することが今後の課題となる．また，FULRD 条件下の最短手数がそのまま，六面利用したときの最短手数でもある場合はどれくらいあるだろうか．

参考文献

- [1] Jerry Bryan, F,U,L,R,D question, Cube Lovers mailing list, 04 Oct 1995. Mark Longridge, Using 5 generators, Cube Lovers mailing list, 07 Oct 1995.
<http://www.math.rwth-aachen.de/~Martin.Schoenert/Cube-Lovers>
- [2] 藤本光史, 泊昌孝, An adventure of chasing operations with order 11 on Rubik's cube, 数式処理 Bulletin of JSSAC (2014) vol.20, no.2, 50-53.
- [3] 百田郁夫, ルービックキューブ完全攻略公式ガイドブック保存版, (2007), 永岡書店.
- [4] ルービックキューブ6面完成攻略, メガハウス.
http://rubikcube.jp/sp/feature/six_field.html
- [5] Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, and John Dethridge, The Diameter of the Rubik's Cube Group Is Twenty, SIAM Rev., 56(4), (2014) 645-670.
- [6] 島内剛一, ルービック・キューブと数学パズル, 日本評論社, 2008.