

数式処理と計算機代数の不思議

長坂 耕作*

神戸大学 大学院 人間発達環境学研究所

数式処理と計算機代数は一般に同じ意味(同意語)として扱われている。数式処理の英文直訳は「formula manipulation」であるが、日本数式処理学会の英文訳と同じく「Symbolic and Algebraic Computation」とするのが通例であろう。一方、英文には「Computer Algebra」という用語もあり、これを直訳すると「計算機代数」となる。言葉尻を捉えただけに過ぎないのだが、この分野に20年前後携わっている人間からすると、ここで不思議なことに気づく。

「Modern Computer Algebra」や「Computer Algebra Handbook」などの定番書籍では、実に幅広いトピックが扱われており、この分野が構成的な代数学と計算機科学などとの学際領域であることを改めて認識することができる。他方、「Symbolic and Algebraic Computation」に近い用語を用いている国際研究集会「The International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)」, ACMの分科会「Special Interest Group in Symbolic and Algebraic Manipulation」や論文誌「Journal of Symbolic Computation」では、どちらかという構成的な代数学にやや偏っていると感じる。その是非は別として、ここで注目したいのは、「Computer Algebra」が「Symbolic and Algebraic Computation」を含む親集合のように見える、ということである。

一方、日本語における「数式処理」と「計算機代数」の包含関係を考えてみたい。まず、計算機代数は計算代数と同じ意味だと仮定する。なぜならば、計算数論や計算幾何学などは「Computational」を伴う分野名に対する邦訳であり、「Computational Algebra」は「Computer Algebra」と同じかという問題なのだが、前者の利用頻度は後者に比べて非常に少なく、Algebraに対しては同じ意味と解釈するのが妥当と考えられるからだ。そうすると不思議なことに、英文での対応と包含関係が逆転し、「計算機代数」が「数式処理」に含まれる部分集合に見えてくる。特に、語感としては、計算機科学寄りの内容(例えば、インターフェースなど)が計算機代数に含まれないので、「数式処理」がより大きな集合であるとわかる。なお、様々な代数計算などが可能な汎用ソフトウェアを、日本語では「数式処理システム」と呼び、英語では「Computer Algebra System (CAS)」と呼ぶことから、より大きな概念が何であるかが示唆される。

この不可思議現象は、数式処理の訳語を「Computer Algebra」にすれば万事解決なのだが、日本数式処理学会は「JSSAC」であって「JSCA」ではないので、本稿では別の解決策を考えたい。

*nagasaka@main.h.kobe-u.ac.jp

すなわち、日本数式処理学会刊行の数式処理巻頭言として、今後の更なる数式処理の発展を期待しつつ、数式処理と計算機代数（計算代数）という言葉の違った解釈に取り組みたいと思う。

始めに、先ほど仮定した「計算機代数は計算代数と同じ意味」というのを取り下げ、計算代数を計算幾何学や計算数論などと同じく、「Computational」という切り口から捉え直したい。計算幾何学を「幾何学の問題を解くアルゴリズムに関する研究」とするならば、計算代数は「代数学の問題を解くアルゴリズムに関する研究」と言える。代数学の問題が何であるかはそれ自身難しい設問だが、ここでは代数的構造（群など）に関する問題としておく。ルービックキューブを解く（ルービックキューブ群における逆元計算）、多項式環で因数分解、行列の計算（ベクトル空間は体上の加群のことであった）、加群における Gröbner 基底計算など、日本数式処理学会の大会でよく見られる議論の多くはここに含まれることがわかる。

では、巨大整数の高速演算や F4 アルゴリズム（Gröbner 基底計算法のひとつ）における実装上の工夫などは「代数学の問題」に含まれるだろうか。現在の計算機の仕組みにおいて、計算機上で実現されるすべての計算は代数的であると言えないこともない。しかし同時に、その他様々な分野的な計算であるとも言えてしまうので、これはいささか暴論であろう。そこで、計算機代数に登場願おう。計算機代数を「計算代数のアルゴリズムを実際の計算機上で実現することに関する研究」と捉えることで、この問題は解決する。例えば、浮動小数点数を用いた数値・数式融合計算なども、計算代数にそのすべてが含まれるとは言えないかもしれないが、計算機代数にきちんと含めることができるし、巨大多項式を効率よく扱うための実践的なデータ構造の議論や純粹な記号処理も研究対象として考えることが、計算機代数では可能となる。

これら計算代数と計算機代数の捉え方に基づき、数式処理の定義をしよう。少し前に暴論と書いたものの、事実として、現在の計算機の仕組みにおいて利用可能な計算の単位は、ベクトル演算（いわゆる SIMD 命令の類）と言える。いささか極論ではあるが、対象によらずベクトル演算を用いて計算されるということは、何らかの議論で線形代数の問題（すなわち、他分野の問題が計算機上で代数的な演算）に帰着されていることを意味する。直接的に計算機代数の技法が適用可能であるかは別として、ここに計算機代数の可能性が見て取れることに疑う余地はないであろう。実際、数理モデルの構築には、数や式の取扱いが不可欠であり、その基盤分野として計算機代数を捉えられるならば、この分野の研究者としてとても嬉しく思えるが、いささか大風呂敷を広げすぎた感も否めない（巻頭言であり、論文ではないのでお許しいただきたい）。

現実的な数式処理の捉え方として、数や式（数式）を用いて表現される問題に対し、計算代数と計算機代数という精緻な手法を用いてアプローチする分野の総称とするのはどうだろうか。近年の日本数式処理学会の大会では、工学分野への応用や教育分野への応用といった研究報告も見られるが、どちらも数や式（数式）を用いて表現される問題に対する研究と言うことは可能だろう。コンセプトは「数や式を精緻に扱う」であり、これは、数値誤差などの不確かな量をそのまま扱っていた初期の近似代数が、結果を正確に保証する議論へと発展し、いまでは計算機代数の一分野として「数値・数式融合計算」が確立されていることとも符合する。

最後に、数や式を精緻に扱う研究分野である数式処理に、多くの方が興味を持ち、様々な理論や事象の解決にその精緻な手法が用いられ、さらに発展することを願いながら巻頭言としたい。