

Maple/MapleSim/Maple T.A. に見る 数式処理の応用技術

岩ヶ谷 崇*

サイバネットシステム株式会社

山口 哲†

Maplesoft

1 はじめに

1980年にカナダ・ウォータールー大学での研究プロジェクトから生まれた数式処理システム『Maple™』は誕生以来各種機能や製品群を発展させ、あらゆる数学の諸分野から数学教育での利用、そして工学分野における新しい問題解決手段として世界に数百万人のユーザを抱えるまでになった。現在も同大学をはじめ北米の周辺大学、及び世界各国の研究拠点による協力のもと、Maplesoftを中心とした体制で精力的な開発が進められている。Maplesoft及び各連携機関での研究開発の目的は、

- (1) 数学基本演算及び科学技術計算機能の拡充・改良・発展：主に Maple
- (2) 記号計算の特徴を生かした数式処理の工学への実際的应用：主に MapleSim
- (3) 数式処理技術を利用した教育システムの開発・改良：主に Maple T.A.

の3点に大別できる。本稿では、この3点に基づいてMaplesoft製品群の特徴を紹介したい。また、最後に数式処理の持つ可能性と興味深さについて、筆者らの活動を通じた視点から述べる。

2 Maple の特徴と基本機能

2.1 Maple の基本機能

Mapleは、商用・非商用問わず他の数式処理システムと同様に基本的な記号計算機能を有している。式の展開 (expand)、因数分解 (factor)、式の整理 (combine)・単純化 (simplify)、記号的な微積分 (diff, int) などの基本演算から、連立方程式系・微分方程式の求解 (solve, dsolve, pdsolve) など問題解決手段としてのコマンドをおよそ6,000種類揃えている¹⁾。加えて、他の一般的な高級言語と類似したプログラミングスタイルを可能とし、ユーザ定義の計算機能の拡

*iwagaya@cybernet.co.jp

†tetsuy@maplesoft.com

¹⁾ http://www.maplesoft.com/documentation_center/ を参照。

日本語ではサイバネットシステム社による『Maple ビギナーズガイド』等が同社ウェブサイトで開催中。

張も比較的容易である。また、Maple の微分方程式ソルバは年々強化されてきており、有名な Kamke 本に掲載されている問題への正答率はすでに 97%以上に達して、他の数式処理システムと一線を画する。ここでは、Maple 本体の要である記号計算機能の特徴を、速度・効率性と機能の幅という観点で解説してみる。Maple 本体の記号計算では、現在の CPU の主流であるマルチコア計算環境への対応を最優先として進めている。表 1 に示すように、マルチコア CPU における多項式処理の高速化に関する研究成果は Maple 本体へと逐次反映されていて、Maple 旧版及び他のシステムと比較しても相応の高速化を実現している。これは、「数式処理は計算速度が遅い」という認識を、少しずつ改めることに貢献してきていると共に、後述する MapleSim 等の工学分野における利用においても極めて高い有効性を与えている。

使用コア数	Maple 15				Maple 14	Maple 13
	1 コア	2 コア	3 コア	4 コア	4 コア	4 コア
CPU 時間	3.61sec	1.87sec	1.26sec	0.96sec	3.21sec	4.54sec

表 1: $(x+y+z+t+u+v+w)^{29}$ の展開に要した CPU 時間
(Core i7 920 2.66GHz, Windows 7, RAM:4GB, Maple 64bit 各版を使用)

表 2 は、Maple 本体において標準で提供されているパッケージの一部である。Maple は、元来少メモリ環境でも実行できるカーネルで設計されており、目的別の機能（これをパッケージと呼ぶ）は適宜その都度呼び出す形式で利用できる。数学諸分野に関する Maple のパッケージ群は、代数、解析、幾何、整数論、代数曲線、微分代数、微分幾何などの分野毎に対する計算機能を網羅した関数群として提供されており、理論計算と実験の橋渡しを手軽に実現できる。

パッケージ名	主な用途	パッケージ名	主な用途
Groebner	グレブナ基底計算	LargeExpressions	冗長式の簡略化
PolynomialIdeals	多項式イデアル	CodeGeneration	言語形式変換
Algebraic	代数演算	Student	数学学習
DifferentialGeometry	微分幾何、リー代数	Statistics	統計解析
DEtools, PDEtools	微分方程式処理	Physics	数理物理

表 2: Maple 標準パッケージの一部

Maple のパッケージ群は、より専門的な計算機能を提供するもの、情報科学・工学等の数学周辺分野に応用するもの、ユーティリティ類に区別できる。これらの各種パッケージの機能を、「生きた対話型実行可能な文書」アプリケーションを実現するための GUI 機能と組み合わせる利用が可能である。つまり、Maple システムは数式処理を使って“開発・研究するユーザ”と数式処理を“利用するユーザ”双方のための機能を提供している。開発したアプリケーションは、Maple 計算エンジンを Web 上で利用する MapleNET や、Maple Player 等の閲覧専用アプリケーションで利用可能である。

2.2 Maple の特徴：長い数式を短くする

数学分野における各種専門的な計算機能については各分野の解説書や Maple 本体に付属のヘルプを参照頂くとして²⁾，ここでは Maple に特徴的な機能を提供している LargeExpressions パッケージと CodeGeneration パッケージについて簡単に紹介する．

LargeExpressions パッケージの目的は単純で、「長い数式を短く表現する」ことである．通常，人間は長い数式を良しとせず，冗長または置き換えられる表現が式内にあった場合は適当な変数や記号で式を短く表現するが，LargeExpressions パッケージはこれを実現する．図 1 は LargeExpressions パッケージを用いた式の簡略化の利用例である．

```

多項式を定義：
> P := 2 x^2 z + 97 x^2 - 94 x y + 87 x z - 56 x - 7 y + 22 z - 55
      P := 2 x^2 z + 97 x^2 - 94 x y + 87 x z - 56 x - 7 y + 22 z - 55

パッケージを読み込み：
> with(LargeExpressions) :
collect コマンドで変数 x に対して式を括る：
> Q := collect(P, x, Veil_K)
           Q := K_1 x^2 - K_2 x - K_3

変数 x の係数で置き換えた内容を確認：
> for k in [K_1, K_2, K_3] do k = Unveil_K(k) end do
           K_1 = 2 z + 97
           K_2 = 56 + 94 y - 87 z
           K_3 = 7 y - 22 z + 55

```

図 1: LargeExpressions パッケージによる式の本換え

式を短く表現することは，計算量の観点から見ても極めて重要である．これは三角関数や数学関数による式の簡単化と共に，全体的な計算量を大きく改善することに寄与する．実際，後に紹介する MapleSim によるモデリング及びシミュレーションでは内部的にこれらの機能を活用しており，他のシステムと比較しても極めて高速なシミュレーション（数値実験）を実現している．この種の応用例は黒子ではあるものの数式処理技術が現実社会の場に貢献できる典型例といっても過言ではない．

CodeGeneration パッケージは，文字通り Maple 上で定義された計算プログラムを，C 言語や Fortran，Visual Basic，Java，C#，MATLAB 等の言語形式へと変換するためのパッケージである．ここでも内部的に LargeExpressions パッケージで述べた式を短く表現するためのルーチンが機能していて，四則演算・関数評価等の計算量指標に基づいて効率的な形式で他のプログラム言語への変換が実現されている．なお，同パッケージにはユーザによる言語変換定義を可能にする機能も提供されており，必要に応じた拡張も可能である．

²⁾ Maple 関連書籍は，<http://www.maplesoft.com/books/> で参照可能．

3 MapleSim™ の特徴と基本機能

MapleSim は、数式処理技術とオブジェクト指向型物理モデリング言語 Modelica³⁾を融合した物理モデリング及びシミュレーション環境である。MapleSim は、物理現象（モデル）を容易に記述し、そして数式処理技術を利用して正確にシミュレーションするためのシステムである。

3.1 MapleSim による物理モデリング

物理モデリングとは物理現象を構成要素に分解し、部分または全体のシステムを記述することを意味する。従来の手順では、ある物理現象から運動方程式を求め、その数式に従ってモデリングを行い、式の計算手順をシグナルフローとして記述することが多く、可読性や再利用、資産化といった面で多くの問題を抱えていた。これに対し MapleSim では、直感的な物理モデリングを可能にしている（図 2）。

■ シグナルフローとの比較図

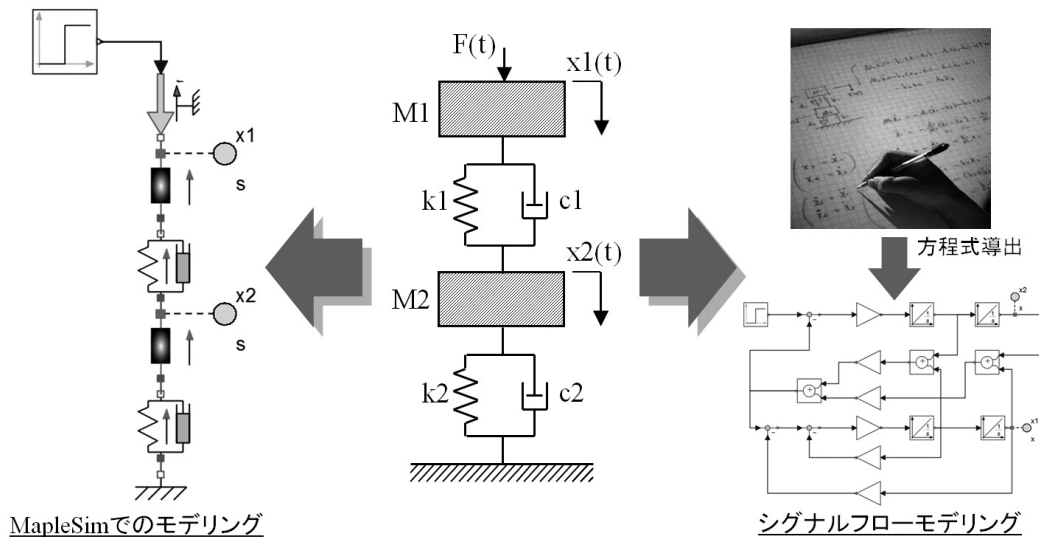


図 2: 2 自由度マス・バネ・ダンパ系のモデル

このような直感的なモデリングを実現している仕組みは、コンポーネントだけでなく、結線にも数式が割り当てられていることにある。シグナルフローでは結線は値の引渡しの意味しか持たない。従って、物理現象のように作用・反作用をモデリングする場合、信号をフィードバックする必要があった。それに対して、MapleSim では結線に数式を割り当てることでシンプルに作用・反作用を表現することが可能になり、実際の対象と同等な表現が可能である（図 3）。

また、物理モデルへの要求としてマルチドメインであることが挙げられる。マルチドメイン・モデルとは、機械・電気・熱等の複数の物理領域を含むモデルのことを言い、実際の物理現象を詳細に考えると必ずマルチドメインであると言える。MapleSim では、各ドメインを接続するた

³⁾ <https://modelica.org/>

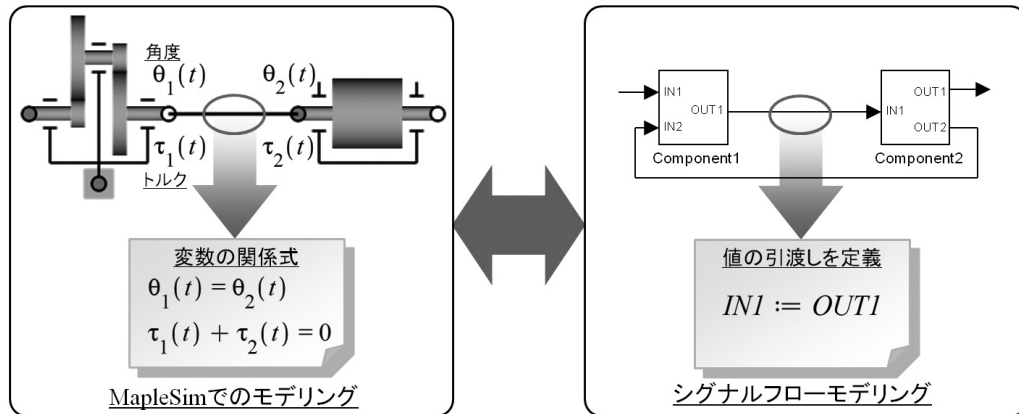


図 3: シグナルフローモデルと MapleSim モデルの違い

めのコンポーネントを用意し，数式によってドメイン間におけるエネルギーの受け渡しを定義することで実現している．図 4 にマルチドメイン・モデルの例として機構負荷及び熱を考慮した DC モータモデルを示す．

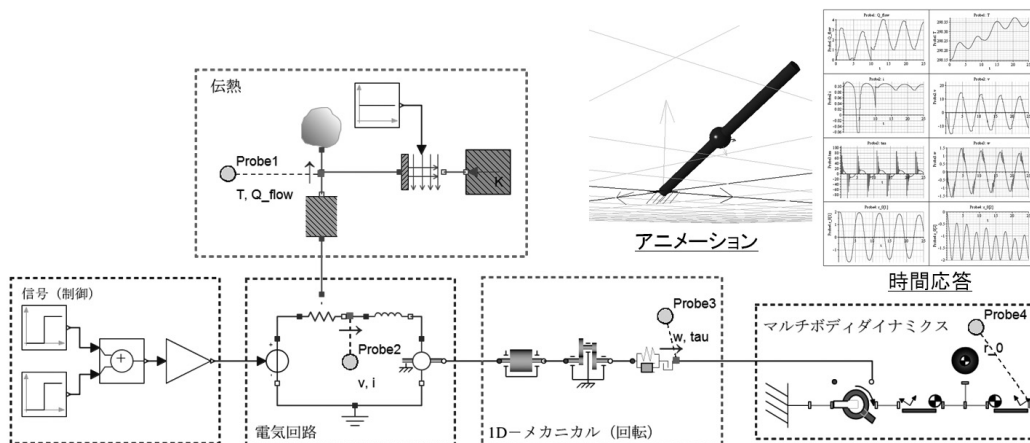


図 4: MapleSim による DC モータモデル

このように MapleSim では，物理モデリングに必要な直感的かつマルチドメインモデリングを，数式処理技術と Modelica 言語によって実現している．

3.2 数式処理技術を活用したシミュレーションプロセスとその効果

MapleSim では，作成した物理モデルを用いて時間応答のシミュレーションが可能である．図 5 にシミュレーションプロセスを示す．

前述した通りコンポーネント及び結線には数式が Modelica コードとして割当てられている．それら全てをまとめて連立微分方程式として解いていくが，その際に数値計算を行うための式変形

や、計算コスト低減に数式処理技術が活用されている。以下に、数式処理技術が活用されている「数式の簡単化」と「DAE(Differential Algebraic Equation)の低 INDEX 化」について紹介する。

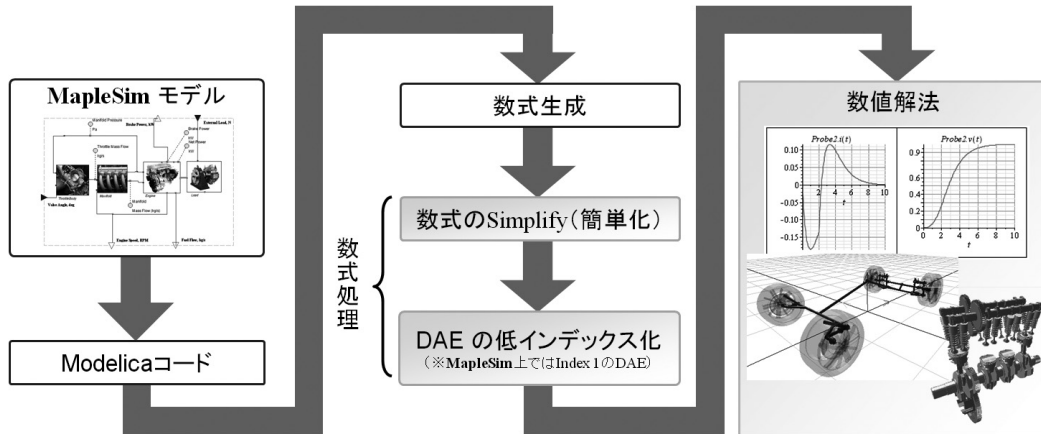


図 5: MapleSim のシミュレーションプロセス

(1) 数式の簡単化

簡単化とは、予め記号計算による前処理を行っておくことで数値計算が不要な式を減らすことである。例えば、多体力学系でよく見られる式中の三角関数に関して、 n 倍角の公式 (の逆) や $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を適用することが挙げられる。

簡単化とは、元の式と等価な形で式変形を行うことであり、計算精度は維持され、かつ数値計算誤差が低減される可能性もある。実際のモデルに適用した例として、約 2,300 個の方程式で構成されていた自動車のエンジンモデルに簡単化を適用することで、約 150 個まで数式の個数を削減し、計算時間が約 1/10 になった。計算の高速化という観点で非常に有効である。

(2) DAE の低 INDEX 化

物理現象を数式として表す場合、通常はダイナミクスを表す微分方程式と物体や場の拘束を表す代数式が連立される。これを微分代数方程式 (DAE) と呼ぶ。例えば、振り子は質点の動き (ダイナミクス) と質点と支点を繋ぐ棒の長さ (拘束) に関する DAE で記述できる。

DAE を陽的数値解法によって数値計算する際には、DAE の INDEX を 0^4 または 1 まで低くすることが望まれ、MapleSim では記号計算を用いて INDEX 1 まで低 INDEX 化を行い高精度の数値計算を行っている。ここで INDEX とは、DAE が常微分方程式 (ODE) に対してどの程度離れているかを示す指標である。図 7 に、低 INDEX 化の例を振り子モデルで示す。

⁴⁾ INDEX 0 の DAE とは ODE (常微分方程式) である。

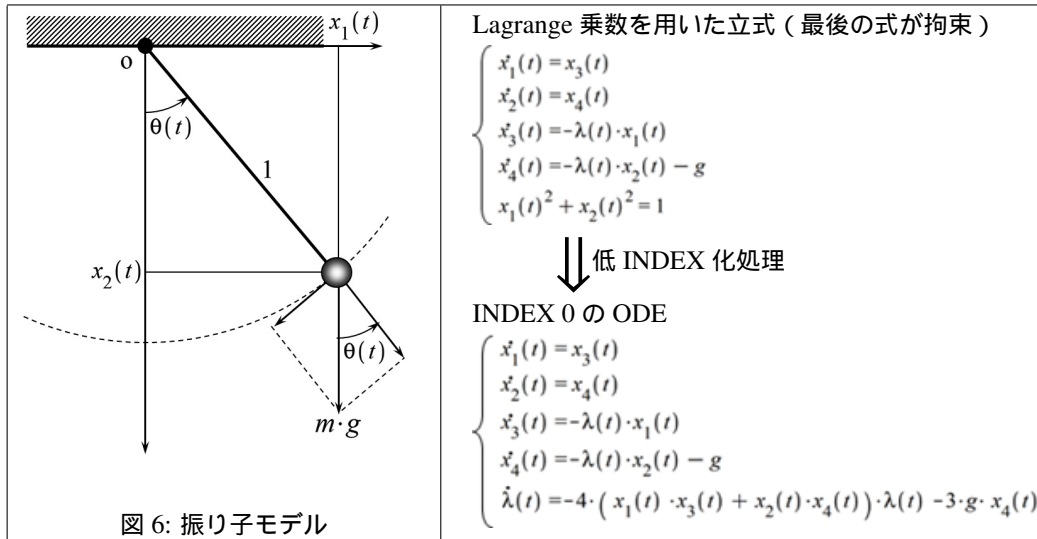


図 7: DAE の低 INDEX 化処理

このように，MapleSim のシミュレーションプロセスでは数式処理技術を活用することで高速かつ高精度な数値計算を実現している．また，これらの数式処理技術はモデルエクスポート機能として C コード生成時にも有効である．産業界では，物理モデルをリアルタイムでシミュレーションするため計算量の低減が重要課題であり，MapleSim の数式処理技術を活用したアプローチが非常に有効である．

3.3 Maple 連携による解析と独自のコンポーネント生成

MapleSim は，Maple と連携することで様々な解析や，数式表現によるユーザ独自のコンポーネント開発を可能にしている．

シミュレーションプロセスでも示したとおり，MapleSim では作成したモデルから数式が陽に生成される．したがって，得られた数式を Maple 環境で利用することで，周波数応答解析，感度解析やパラメトリックな最適化等が可能である．

また，MapleSim には独自のコンポーネント生成機能があり，Maple 環境で入力した数式から直接コンポーネントを生成することが可能である．これにより，プログラムの手間を省くと共に，Maple ワークシートを仕様書として作成することで，作成したコンポーネントの資産化・共有化が容易である．

MapleSim は，数式の自動生成，生成した数式の簡単化及び変換，そして C 言語への変換を通じた高速シミュレーションの実現という，数式処理の応用ツールである．これは数式処理の利用機会に関する敷居を大幅に下げている．実際，すでに多くの産業分野における設計・開発での MapleSim の適用が始まっており，また同時に工学教育分野での利用も進んできている．

4 Maple T.A. の特徴と基本機能

ここでは、教育分野への Maple の数式処理技術の応用製品である Maple T.A.TM について述べる。

4.1 Maple T.A. の特徴

Maple T.A. は、大学や高校等教育現場における「テストと評価: Testing & Assessment」をインターネット経由で実現するためのシステムである。これは、欧米諸国の教育機関では一般的な、学生・生徒に対する日々多くの「レポート課題」や「試験」をオンライン上で実現し、かつその採点・成績管理フローについても数式処理を用いた自動化・DB 化を実現するシステムとなっている。教育システムの違いから、特に北米・欧州及び日本以外のアジア地域で Maple T.A. の導入は盛んになってきているが、Maplesoft が行った Maple T.A. に関するユーザ利用評価からの主な導入理由及び効果は以下の通りである。

課題・設問のパーソナライズ化

集合教育の困難は、個々の学生・生徒の習熟度の違いをどのように吸収して教育を提供するかにある。Maple T.A. は過去の回答傾向や理解到達度を総合的に勘案して、個人毎・グループ毎のステップアップの一助を与える。

採点・指導における作業効率化

教育者は同時に研究活動（教育のための研究活動を含む）にも時間を割かねばならない。Maple T.A. は設問コンテンツを学内・学外とも共有し、課題の質・量ともに効率的な運用を実現する。同時に、数学的に等価な回答を数式処理により評価することで、採点にかかる属人性を可能な限り排除する。

課題提出・試験時の不正行為（カンニング等）の抑制

不正行為を完全になくすことは困難を極めるが、教育者側にとっては学生・生徒が不正行為を働くよりも授業への関心が増すような仕組みを与えることに価値がある。Maple T.A. はオンラインシステムの特性を生かし、レポート課題・試験を通じた教員・生徒間のコミュニケーションの活性化対策としても利用を見込める。

4.2 Maple T.A. の基本機能

Maple T.A. は次の基本機能から構成されている。

(1) 数学的な設問提供

同種設問や選択肢の順序のランダム設定

(2) Maple エンジンの利用

作図問題等で Maple のプログラミング機能を利用したカスタマイズ可能な設問手法の提供

(3) 手軽なコンテンツ（設問）開発環境

各種用意された設問テンプレートを利用した設問コンテンツの効率的開発

(4) 自動採点

異なる回答が数学的・形式的に等価か否かを数式処理により判断

(5) 回答分析・習熟度分析

同種設問の誤答率を個人・グループ毎に統計化

(6) 豊富な認証・管理形態

LDAP 等のシステム認証，既存教育システムとの統合

このように，Maple T.A. は数式処理システム Maple の上に構成されているシステムとはいえ，もはや数式処理システムの延長線以上の機能を包括的・総合的に提供している．言い換えると，数式処理技術を最大限に活用したワンストップ型の具体的な教育システムにおける課題解決システムとなりつつある．ただし，例えば北米の教育機関では全学で本システムを利用することもあれば，学科や学部等より小さい範囲で Maple T.A. を利用するケースもあり，柔軟なシステム導入が可能であることが伺える．

5 数式処理の可能性

筆者らは日本国内を中心にして定期的に Maplesoft 製品のユーザに様々なヒアリングを行なっている．その過程で，産業・教育の分野の区別なく数式処理だからこそ対処可能な問題をいくつも見てきた．これは数式処理を基幹技術として見た場合の有用性を示すものである．しかし同時に，数式処理は従来の枠にとらわれずに更なる発展を求められていると強く感じる．筆者らは数式処理を製品として開発・販売する組織に属する者として，引き続き多くのユーザからのフィードバックに耳を傾けると共に，数式処理の発展の一端を担うべく各種ワークショップや学会活動を通じて情報交換・共有の場をますます増やしていく必要があると考えている．数式処理の持つ学際的な可能性に目を向けて，これからも多様な機会創出を実現していきたい．