

Jarque-Bera 型統計量のモーメント導出と数式処理

中川 重和*

倉敷芸術科学大学

1 はじめに

Jarque-Bera [3] 統計量は、統計科学では古典的な部類に属する「正規性の検定」に現れる統計量である。1980年代まで活発に行われていた一変量の正規性検定に関する研究が、近年再び注目されている。その理由は、主に二つ考えられる。一つ目の理由は、経済学において総括的な正規性検定が活発に利用されている点である [9]。特に、回帰分析において誤差項に正規性を仮定してよいかどうかを検討する必要がある。二つ目の理由は、多変量解析においても多変量正規性の検定の重要性が増してきている [4] が、その行き着くところは縮約された一変量の正規性検定へ帰着される点である。

統計科学において、正規性検定方式の新提案のための一般的な枠組みは次の通りである。第一は、歪度や尖度などの正規性を特徴づける量に対する良い推定量を探し、帰無仮説の下でのその分布を求めること。第二は、その検出力が既存の検定統計量のそれより高くなることを示すことである。そして、数式処理が寄与するのは主に第一の部分である。

本稿では、著者らの最近の結果 [6, 7] に基づき、第一の部分に焦点を当て、総括的な正規性検定統計量である Jarque-Bera 型統計量の分布導出において数式処理がどのように寄与しているかを解説する。また関連研究として、歪度に関する検定統計量の新提案が [8] にある。

本稿の構成は以下の通りである。まず、2 節において、正規性の検定に関して概観した後、Jarque-Bera 統計量の定義を与える。3 節では、Jarque-Bera 統計量のモーメントを導出する。また、導出の際に数式処理が果たした役割、計算のための工夫についても言及する。4 節では、前節の結果を踏まえ、修正を施した Jarque-Bera 統計量を提案し、その近似分布を与える。5 節は、3,4 節で用いた対称式変換アルゴリズムの紹介に充てる。最後に 6 節において、統計科学への応用の立場からの数式処理への要望を述べる。

2 Jarque-Bera 統計量

確率変数 X が平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うとは、その確率密度関数として $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma) \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$ を持つ分布に従うことであり、それを $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ で表す。母

*nakagawa@cs.kusa.ac.jp

集団分布として正規分布を考える場合（正規母集団という），母集団歪度・母集団尖度がそれぞれ $\sqrt{\beta_1} = 0$, $\beta_2 = 3$ となることで特徴付けられる．母集団歪度・母集団尖度の推定量である標本歪度，標本尖度は，大きさ n の標本 (X_1, X_2, \dots, X_n) が与えられたとき， r 次標本モーメント

$$m_r = (1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r, \quad \left(\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i \right) \quad (1)$$

を用い，それぞれ $\sqrt{b_1} = m_3/m_2^{3/2}$, $b_2 = m_4/m_2^2$ で定義される統計量である．もし，正規母集団からの標本で定義される $\sqrt{b_1}$ と b_2 の分布がわかれば，それらに基づき正規性の検定方式が構築できる．実際， $\sqrt{b_1}$ が平均 0，分散 $6/n$ の正規分布に漸近的に従う（ $\sqrt{b_1} \sim N(0, 6/n)$ ($n \rightarrow \infty$) で表す）こと，また $b_2 \sim N(3, 24/n)$ ($n \rightarrow \infty$) であることが知られており，歪度，尖度に関する正規性の検定方式がそれぞれ個別に構築できる．

総括的な正規性検定とは，母集団歪度，尖度の検定を個別に行うのではなく，標本歪度，尖度を組み合わせた検定統計量で検定する方式である．上述した標本歪度，尖度の分布の漸近正規性の帰結として，それらの基準化の平方和が自由度 2 の χ^2 分布に漸近的に従うことに基づく検定方式を考えることができる．実際，このような統計量

$$LM = n \left[\frac{(\sqrt{b_1})^2}{6} + \frac{(b_2 - 3)^2}{24} \right] \quad (2)$$

は，Jarque-Bera [3] により，Pearson 分布の下での Lagrange 乗数検定の統計量として，一般的な枠組みの下導かれている．図 1 は， LM 統計量の $n = 100$ ，シミュレーションサイズ 10^4 のヒストグラムである．点線は自由度 2 の χ^2 分布の密度関数を示す．統計量 LM の帰無仮説の下での分布（ LM が正規標本で作られている）は， n が十分大きいときに自由度 2 の χ^2 分布に従うことに基づいているが，[11] においても指摘されている通り，さらにはこの図からわかるように $n = 100$ でさえも近似がよくない．この点を明らかにするためには， LM 統計量の高次モーメントが必要である．

3 モーメント導出

大きさ n の標本 (X_1, X_2, \dots, X_n) が正規母集団から得られたと仮定する．特に，標本歪度，尖度は，位置と尺度に関して不変なので，標準正規母集団と仮定してよい．このとき， LM の原点周りの r 次モーメントは， LM^r を展開し，項別に期待値を取ればよい．例えば，原点周りの LM の 2 次モーメントは，

$$E[LM^2] = n^2 \left(\frac{1}{576} E[b_2^4] - \frac{1}{48} E[b_2^3] + \frac{1}{72} E[b_2^2 \sqrt{b_1^2}] + \frac{3}{32} E[b_2^2] - \frac{1}{12} E[b_2 \sqrt{b_1^2}] \right. \\ \left. - \frac{3}{16} E[b_2] + \frac{1}{36} E[\sqrt{b_1^4}] + \frac{1}{8} E[\sqrt{b_1^2}] + \frac{9}{64} \right)$$

であり，右辺に現れる各 $E[\sqrt{b_1^{2i} b_2^j}]$ の値がわかればよい．しかし，これらの期待値を取る操作に最も計算コストがかかっている．ここが数式処理が活躍する最大の場面である．

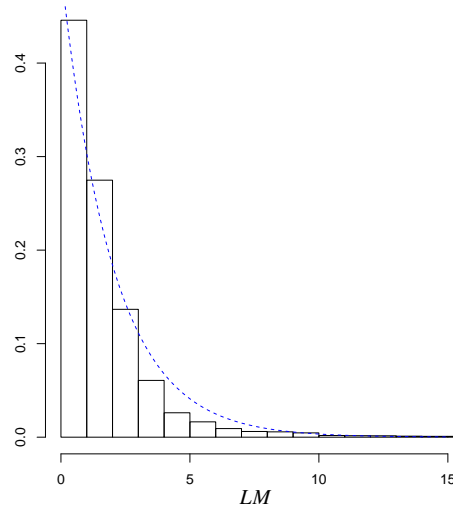


図 1: LM 統計量のヒストグラム ($n = 100$, 10^4 回のシミュレーション)

効率化のためのポイントは以下の通りである．それらは，

$$E\left[\sqrt{b_1^{2i} b_2^{2j}}\right] = E\left[\frac{m_3^{2i} m_4^{2j}}{m_2^{3i+4j}}\right] = \frac{E\left[m_3^{2i} m_4^{2j}\right]}{E\left[m_2^{3i+4j}\right]} \quad (3)$$

が成立すること [10] と ($1 \leq i + j \leq 4$ に対して計算を行う)，さらに分母の値が

$$E\left[m_2^r\right] = \frac{(n-1)(n+1)\cdots(n+2r-3)}{n^r} \quad (4)$$

と計算できることである．正規標本のもとで， m_2 と m_3 ならびに m_2 と m_4 がそれぞれ互いに独立であることより，式 (3) の 2 番目の等式が成立する．また，正規標本のもとで， nm_2 が自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従うので，式 (4) が成立する．残るは，式 (3) の分子の計算である．この計算には，次節で述べる対称式変換アルゴリズムを用いる．

LM の平均 $\mu'_1(LM)$ および平均周りの j 次モーメント $\mu_j(LM)$ は次式で与えられる：

$$\mu'_1(LM) = \frac{(4n^2 - 3n + 25)n}{2(n+5)(n+3)(n+1)},$$

$$\mu_2(LM) = \frac{2(2n^6 + 495n^5 + 554n^4 - 10476n^3 + 18912n^2 + 91149n - 184060)(n-2)n^3}{(n+13)(n+11)(n+9)(n+7)(n+5)^2(n+3)^2(n+1)^2},$$

$$\mu_3(LM) = \left(8(2n^{11} + 2025n^{10} + 861788n^9 + 5769390n^8 - 19761244n^7 - 134994108n^6\right.$$

$$\begin{aligned}
& + 457726508n^5 + 1452989178n^4 - 6483391294n^3 - 5781157125n^2 \\
& + 32571472400n - 8651874000)(n-2)(n-3)n^4) / ((n+21) \\
& (n+19)(n+17)(n+15)(n+13)(n+11)(n+9)(n+7)(n+5)^3(n+3)^3(n+1)^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4(LM) = & \left(12(12n^{18} + 23028n^{17} + 21347049n^{16} + 15390765774n^{15} \right. \\
& + 105896947502n^{14} - 759578357444n^{13} - 4982220823577n^{12} + 25967130966878n^{11} \\
& + 112941938752736n^{10} - 619021736758820n^9 - 1198924081847897n^8 \\
& + 9784281501292778n^7 + 1444648530206630n^6 - 86520766504621484n^5 \\
& + 92144214184163305n^4 + 295577004473959850n^3 - 597250129494708000n^2 \\
& \left. + 205084152672300000n - 46989682740000000)(n-2)n^5) / \right. \\
& \left. ((n+29)(n+27)(n+25)(n+23)(n+21)(n+19)(n+17)(n+15) \right. \\
& \left. (n+13)(n+11)(n+9)(n+7)(n+5)^4(n+3)^4(n+1)^4) \right).
\end{aligned}$$

これらを漸近展開の形で表すと,

$$\mu'_1(LM) = 2 - \frac{39}{2}n^{-1} + 142n^{-2} + O(n^{-3}) \quad (5)$$

$$\mu_2(LM) = 4 + 750n^{-1} - 50120n^{-2} + O(n^{-3}) \quad (6)$$

$$\mu_3(LM) = 16 + 13896n^{-1} + 4742016n^{-2} + O(n^{-3}) \quad (7)$$

$$\mu_4(LM) = 144 + 239760n^{-1} + 190951308n^{-2} + O(n^{-3}) \quad (8)$$

となり, それぞれの $O(1)$ の項が自由度 2 の χ^2 のモーメントに一致している.

4 修正した Jarque-Bera 統計量

前節の (5) から (8) 式により, LM 統計量のキムラントが Cornish-Fisher 条件を満足しないことがわかる. この条件を満足するように LM 統計量を修正した統計量が

$$LM' = \frac{(\sqrt{b_1})^2}{6} + \frac{b_2^2}{24} \quad (9)$$

である.

前節と同様の計算を行い, LM' の平均 $\mu'_1(LM)$ および平均周りの j 次モーメント $\mu_j(LM)$ は

$$\mu_1(LM') = \frac{(n^2 + 12n + 7)(3n - 5)}{8(n+5)(n+3)(n+1)},$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(LM') = & (3n^7 + 239n^6 + 6819n^5 + 37283n^4 - 8775n^3 - 329451n^2 - 327711n \\
& - 99175)(n-2)n / (2(n+13)(n+11)(n+9)(n+7)(n+5)^2(n+3)^2(n+1)^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3(LM') = & \left((36n^{12} + 7621n^{11} + 695016n^{10} + 30383269n^9 + 394400346n^8 \right. \\ & + 1869091018n^7 + 233869944n^6 - 24473922254n^5 - 63720419472n^4 - 33172995119n^3 \\ & + 20403993840n^2 + 23868462025n + 5853965250) (n-2)(n-3)n / ((n+21) \\ & (n+19)(n+17)(n+15)(n+13)(n+11)(n+9)(n+7)(n+5)^3(n+3)^3(n+1)^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4(LM') = & \left(3(9n^{20} + 5220n^{19} + 1412049n^{18} + 228644814n^{17} \right. \\ & + 22887214236n^{16} + 1244202171384n^{15} + 21166175101484n^{14} \\ & + 134655913710880n^{13} - 3878927732618n^{12} - 3747328484021152n^{11} \\ & - 11295468689961274n^{10} + 28461458338142284n^9 + 162799551197327308n^8 \\ & + 13887780973840328n^7 - 687890843630730004n^6 - 622240355029001648n^5 \\ & - 11630675855888855n^4 - 43790005880628100n^3 - 303698202153555375n^2 \\ & - 203359715388506250n - 39895978711050000) (n-2)n / \\ & (4(n+29)(n+27)(n+25)(n+23)(n+21)(n+19)(n+17)(n \\ & + 15)(n+13)(n+11)(n+9)(n+7)(n+5)^4(n+3)^4(n+1)^4). \end{aligned}$$

で与えられる。さらに, $\sqrt{\beta_1(LM')}$, $\beta_2(LM')$ もただちに計算でき, それらの漸近展開は

$$\sqrt{\beta_1(LM')} = 8\sqrt{6}n^{-1/2} + \frac{2750\sqrt{6}}{9}n^{-3/2} - \frac{33968\sqrt{6}}{9}n^{-5/2} + O(n^{-7/2}), \quad (10)$$

$$\beta_2(LM') = 3 + 860n^{-1} + 100188n^{-2} + \frac{30624652}{9}n^{-3} + O(n^{-4}). \quad (11)$$

となる。以上より,

$$\mu'_1(LM') \rightarrow 3/8, \quad n\mu_2(LM') \rightarrow 3/2, \quad \sqrt{\beta_1(LM')} \rightarrow 0, \quad \beta_2(LM') \rightarrow 3 \quad (n \rightarrow \infty)$$

がわかる。

定理 1 ([6, 7])

LM' の基準化 $S = (\sqrt{n}(LM' - 3/8)) / \sqrt{3/2}$ の 4 次までのキユムラントは Cornish-Fisher 条件を満足する:

$$\kappa_1(S) = \frac{1}{2}n^{-1/2} + O(n^{-3/2}), \quad (12)$$

$$\kappa_2(S) = 1 + \frac{59}{3}n^{-1} + O(n^{-2}), \quad (13)$$

$$\kappa_3(S) = 8\sqrt{6}n^{-1/2} + O(n^{-3/2}), \quad (14)$$

$$\kappa_4(S) = 860n^{-1} + O(n^{-2}). \quad (15)$$

系 1

S の Edgeworth 展開は次で与えられる .

$$\begin{aligned} \Pr(S < s) = & \Phi(s) - \phi(s) \left[\left(\frac{4}{3} \sqrt{6} H_2(s) + \frac{1}{2} \right) n^{-1/2} + \left(\frac{16}{3} H_5(s) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{215}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) H_3(s) + \frac{239}{24} H_1(s) \right) n^{-1} \right] + O(n^{-3/2}). \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, $\Phi(s)$, $\phi(s)$ は, それぞれ標準正規分布の分布関数, 密度関数を示す. また, $H_j(s)$ は j 次エルミート多項式である .

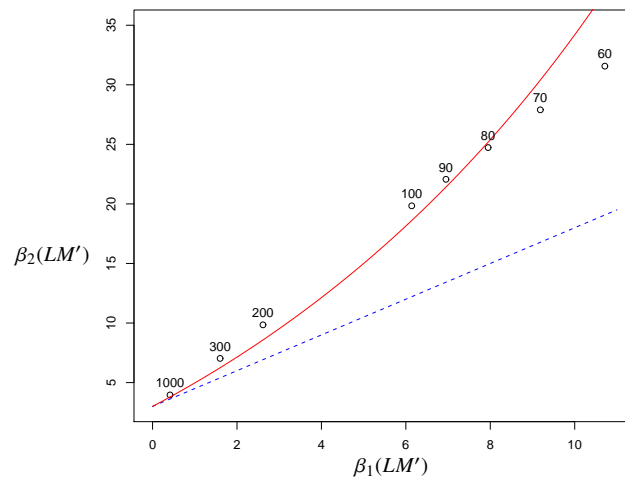


図 2: $(\beta_1(LM'), \beta_2(LM'))$ チャート

次に, LM' 統計量の分布を Pearson システムで近似することを考える. 分布の特性値である β_1 と β_2 の関係から Pearson システムはタイプ 1 から 9 まで分類される. どのタイプでの近似が良いかを決定するため, Pearson (β_1, β_2) チャートに $\beta_1(LM')$, $\beta_2(LM')$ のいくつかの値をプロットする. 図 2 にチャートの一部分が描かれており, 図の下側にある直線 (点線) $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$ は Pearson システムタイプ 3 分布 (ガンマ分布) を表す. 一方, 上側にある曲線 $\beta_1(\beta_2 + 3)^2 = 4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)$ は Pearson システムタイプ 5 分布, つまり逆数が χ^2 分布に従う分布を表す. その上に, サンプルサイズ $n = 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 1000$ に対する $(\beta_1(LM'), \beta_2(LM'))$ の値をプロットしている.

図 2 より, n が大きくなると, LM' 統計量は Pearson システムタイプ 5 分布で近似してよいことがわかる. つまり, LM' の逆数の一次関数がある自由度を持つ χ^2 分布に漸近的に従うとしてよい. そこで, LM' の基準化を $Z = (LM' - \mu'_1(LM')) / \sqrt{\mu'_2(LM')}$ とし, $1/(pZ + q)$ が

自由度 A をもつ χ^2 分布に従うように p, q, A を定める．さらに, $1/(pZ + q)$ に Wilson-Hilferty の変換を施すことにより次の定理を得る．

定理 2 ([6, 7])

正規標本 X_1, X_2, \dots, X_n が与えられたとき, $\sqrt{\beta_1} = \sqrt{\beta_1(LM')}$, $A = 6 + \frac{8}{\sqrt{\beta_1}} \left[\frac{2}{\sqrt{\beta_1}} + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_1}} \right]$

とすると,

$$\left(\left(1 - \frac{2}{9A} \right) - \left(\frac{1 - (2/A)}{1 + Z \sqrt{2/(A-4)}} \right)^{1/3} \right) / \sqrt{2/9A} \quad (17)$$

は漸近的に標準正規分布に従う．ただし, $Z = \frac{LM' - \mu'_1(LM')}{\sqrt{\mu_2(LM')}}$ である．

5 対称式変換アルゴリズム

本節では, [5] の対称式変換アルゴリズムを紹介する．大きさ n の標本 (X_1, X_2, \dots, X_n) が母集団 F から採られたとし, F には必要次数までのモーメントの存在を仮定する．本節では, $X \sim F$ のとき, 原点周りの $j (\geq 1)$ 次母集団モーメントを $\mu'_j = E_F[X^j]$, 平均周りの $j (\geq 2)$ 次母集団モーメントを $\mu_j = E_F[(X - \mu'_1)^j]$ で表す．

式 (1) で定義された任意次数の標本モーメント m_r ならびにそれらの積は, X_1, X_2, \dots, X_n の対称多項式であり, これらは, 後で定義するべき和積の荷重和で書くことができる．

定義 1

正整数の任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ に対し, べき和積を

$$P(\lambda) = P(\lambda_1)P(\lambda_2) \cdots P(\lambda_k), \quad (18)$$

と定義する．ここで $P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^n X_i^{\lambda_i}$ である．

標本モーメントの積の期待値計算を考えると, べき和積よりもむしろ次の augmented symmetric polynomial に対する期待値計算が簡便である．

定義 2

正整数の任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ に対し, augmented symmetric polynomial は

$$A(\lambda) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k} X_{i_1}^{\lambda_1} X_{i_2}^{\lambda_2} \cdots X_{i_k}^{\lambda_k} \quad (19)$$

で定義される．右辺の和は, 異なる添え字すべてについて取ることとする．従って, 右辺は ${}_n P_k = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ 個の項からなる．

期待値計算に関し, 次式が成立する:

$$E_F[A(\lambda)] = {}_n P_k \mu'_{\lambda_1} \mu'_{\lambda_2} \cdots \mu'_{\lambda_k}. \quad (20)$$

もし $\{P(\lambda)\} \rightarrow \{A(\lambda)\}$ なる変換アルゴリズムがあれば, $E_F[m_{r_1}^{j_1} m_{r_2}^{j_2} \cdots]$ の計算ができる．実際, 次の 2 つの事実

- 長さが 1 の分割 (r) に対し, $P(r) = A(r) = \sum_{i=1}^n X_i^r$ が成立する
- $P(r)$ と $A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ との積に関し, 分割の並びを無視すると,

$$P(r)A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = A(r, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) + A(r + \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad (21)$$

$$+ A(\lambda_1, r + \lambda_2, \dots, \lambda_k) + \dots + A(\lambda_1, \lambda_2, \dots, r + \lambda_k)$$

が成立する

に基づき, 以下のように対称式変換アルゴリズムが構成できる.

アルゴリズム 1

入力: P からの分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$

出力: A の荷重和

1. もし分割 λ の長さ¹⁾ が 1 ならば, $A(\lambda) = P(\lambda)$ を出力し終了.
2. $U := P(\lambda_1) = A(\lambda_1)$, $i := 2$ とする.
3. $U := P(\lambda_i) \times U$ を式 (21) により展開する.
4. $i := i + 1$ とする.
5. もし $i > \ell(\lambda)$ ならば U を出力し終了. そうでなければ, ステップ 3 に戻る.

例として, $E_F[m_2^2]$ を計算してみよう.

$$m_2^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^2 = \frac{1}{n^2} P(2, 2) - \frac{2}{n^3} P(2, 1, 1) + \frac{1}{n^4} P(1, 1, 1, 1) \quad (22)$$

と m_2^2 がべき和積の荷重和で表現できる. $P(2, 1, 1)$ にアルゴリズム 1 を適用すると,

$$\begin{aligned} P(2, 1, 1) &= A(2)P(1)P(1) = (A(3) + A(2, 1))P(1) \\ &= A(4) + A(3, 1) + A(3, 1) + A(2, 2) + A(2, 1, 1) \\ &= A(4) + 2A(3, 1) + A(2, 2) + A(2, 1, 1) \end{aligned} \quad (23)$$

となる. $P(2, 2)$, $P(1, 1, 1, 1)$ も同様に計算し,

$$m_2^2 = \frac{(n-1)^2}{n^4} A(4) - \frac{4(n-1)}{n^4} A(3, 1) + \frac{n^2 - 2n + 3}{n^4} A(2, 2) - \frac{2(n-3)}{n^4} A(2, 1, 1) - \frac{1}{n^4} A(1, 1, 1, 1) \quad (24)$$

であり, 式 (20) に従い期待値を取ると,

$$\begin{aligned} E_F[m_2^2] &= \frac{(n-1)^2}{n^3} \mu_4' - \frac{4(n-1)}{n^3} \mu_3' \mu_1' + \frac{(n^2 - 2n + 3)(n-1)}{n^3} (\mu_2')^2 \\ &\quad - \frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} \mu_2' (\mu_1')^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} (\mu_1')^4 \\ &= \frac{(n-1)^2}{n^3} \mu_4 + \frac{(n-1)(n^2 - 2n + 3)}{n^3} \mu_2^2 \end{aligned} \quad (25)$$

¹⁾ 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ に対し, その長さ k を $\ell(\lambda)$ で表す.

を得る．さらに， F として標準正規分布を仮定すると， $\mu_2 = 1$ ， $\mu_4 = 3$ なので，この場合は $E_F[m_2^2] = (n-1)(n+1)/n^2$ となり，(4)の結果とも一致する．

6 今後の展望：統計科学への応用の立場からの数式処理への要請

上の例からも想像できるように，統計量分布論における計算の大部分は多項式計算に費やされる．よって，大規模多項式計算を高速に実行できる数式処理 REDUCE への実装は妥当であろう．しかし，32ビット版 Linux 上で稼働する REDUCE (ver.3.8) は，下位 LISP の関係もあり，128MB のメモリ空間しか取り扱えない．現状では， LM および LM' 統計量のモーメント導出で4次までが限界である．このメモリ空間の壁を超える REDUCE のリリースを待ち望んでいるところである．

それと同時にアルゴリズムの改良を行う時期に来ている．改良の方向は2つ考えられる．第一点は，中間数式膨張を抑制する方向への改良である．式(25)の2番目の等式に見られるように，期待値計算の最終結果として $\mu'_1 = 0$ とすることは，式(23)において分割の要素に1を含むすべての A が，最終結果としては消えてなくなる項であることを意味しており，しかもそのような項が大半を占めている．このような途中経過には必要であるが，最終結果には不必要である項が出現する現象を中間数式膨張と言うが，この現象を抑えることがより本質的である．第二点は，アルゴリズム1自体の高速化を目指すことである．今後，umbral calculus [1] などの可能性を探っていきたい．

参 考 文 献

- [1] Di Nardo, E. and Guarino, G. and Senato, D. (2008) Symbolic Computation of Moments of Sampling Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**(11), 4909–4922.
- [2] Hearn, A. C. (2004) *REDUCE User's Manual, Version 3.8. Report*.
- [3] Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987) A test for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review*, **55**(2), 163–172.
- [4] Koizumi, K. and Okamoto, N. and Seo, T. (2009) On Jarque-Bera tests for assessing multivariate normality, *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications*, **1**(2), 207–220.
- [5] 中川重和, 仁木直人 (1991) 対称式の変換アルゴリズムとその多変量統計量分布論への応用, *計算機統計学*, **4**(1), 35–43 .
- [6] Nakagawa, S., Niki, N., and Hashiguchi, H. (2007) An omnibus test for normality, *Proceedings of the ninth Japan-China symposium on statistics*, 191–194.
- [7] Nakagawa, S., Niki, N., and Hashiguchi, H. (2008) Numerical Comparisons of Power of Omnibus Tests for Normality, *Proceedings in COMPSTAT 2008*, 769–774.
- [8] Nakagawa, S., Hashiguchi, H., and Niki, N. (2008) Asymptotic expansions for the null distribution of an omnibus test statistic for normality, *Proceedings IASC2008*, 1221–1224.
- [9] Poitras, G. (2006) More on the correct use of omnibus tests for normality, *Economic Letters* **90**(3), 304–309.
- [10] Stuart, A and Ord, J. K. (1994) *Kendall's Advanced Theory of Statistics, vol. I, 6th ed.*,

Edward Arnold.

- [11] Thadewald, T. and Buning, H. (2007) Jarque-Bera test and its competitors for testing normality-A power comparison, *Journal of Applied Statistics*, **34**(1), 87–105.