数式処理 *J.JSSAC (2007)*
Vol. 14, No. 1, pp. 25 - 40

CGB 特集

Dynamic Evaluation を用いた Discrete Comprehensive Gröbner Bases の計算

倉田 陽介*

神戸大学 自然科学研究科

1 Introduction

2005 年から 2006 年にかけて，Comprehensive Gröbner Bases (CGB) および Comprehensive Gröbner System (CGS) 計算法 [17]，すなわち係数にパラメータを含む Gröbner Bases 計算法に Suzuki-Sato による新しい計算法 [14] が発表された．

Weispfenning [17, 18] や Montes [6, 4] あるいは Suzuki-Sato [13] による CGS & CGB 計算は本質的にはパラメータ多項式を有理関数体 $\mathbb{Q}(\bar{A})$ の元と見なした多項式環 $\mathbb{Q}(\bar{A})[\bar{X}]$ 上に，それぞれに特化した S 多項式と単項簡約を定義することによって実現されてきた．しかし，Suzuki-Sato による新しい計算法は通常の $\mathbb{Q}$ 上の多項式環 $\mathbb{Q}[\bar{A}, \bar{X}]$ 上での Gröbner bases 計算法を利用した方法であり，いくらかの例で従来の方法よりも高速に CGS & CGB を出力する．

Discrete comprehensive Gröbner bases (DCGB) は 2001 年に Sato-Suzuki [10] によって発表された．DCGB は specialization homomorphism $K(\bar{A})[\bar{X}] \longrightarrow L[\bar{X}]$（$L$ は K の代数的閉包）の定義域を 0 次元多様体に制限した特殊な CGS を与える．DCGB は 2003 年に同じく Sato-Suzuki [11] によって，より一般的な形式が与えられるに至った．パラメータへの代入定義域を決定する 0 次元多様体 V を定義する 0 次元根基イデアルを I とすると，$K[V]$ を含む最小の von Neumann regular ring は $R = K[\bar{A}]/I$ と表され，DCGB の計算は多項式環 $R[\bar{X}]$ 上の Gröbner bases 計算によって与えられる．

これまで，有限多項式集合 $F \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$ の DCGB 計算は von Neumann regular ring $K[\bar{A}]/I$ 上の quasi-inverse，および idempotent 演算が現実的でなかったため，I の（最短）素イデアル分解 $I = P_1 \cap \cdots \cap P_k$ を用いて，それぞれの分解成分に対応する体 $K[\bar{A}]/P_i$, $(1 \leq i \leq k)$ 上の多項式環 $(K[\bar{A}]/P_i)[\bar{X}]$ 上で $\phi_{P_i}(F) = \{\phi_{P_i}(f) \mid f \in F\}$, $(\phi_{P_i} : K[\bar{A}, \bar{X}] \longrightarrow (K[\bar{A}]/P_i)[\bar{X}])$ の Gröbner basis 計算を行い，結果を Chinese remainder theorem (CRT) によって結合することで，$(K[\bar{A}]/I)[\bar{X}]$ の元に復元して Gröbner basis を計算していた．しかし，イデアルの素分解や CRT

*kurata@math.kobe-u.ac.jp

© 2007 Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation

による復元の計算コストは一般的に高く，これらの計算においてボトルネックとなる可能性がある．

本論文では DCGB の新しい計算法を提案する．それは von Neumann regular ring $K[\bar{A}]/I$ 上の多項式環 $(K[\bar{A}]/I)[\bar{X}]$ で Buchberger アルゴリズムを直接実行するものである．今回の計算法では $K[\bar{A}]/I$ での quasi-inverse を計算するために Noro [9] による Modular Dynamic Evaluation (MDE) を用いる．MDE は Dynamic Evaluation をイデアル商の観点から見直したものである．0 次元根基イデアル I と $[a]_I \in K[\bar{A}]/I$ に対して，MDE は $[a]_I$ が単元ならば，その逆元 $[a]_I^{-1}$ を計算し，そうでなければ I の分解 $I = (I : a) \cap (I + \langle a \rangle)$ を与える．より具体的には，MDE は $[a]_I$ の逆元計算に失敗した場合，$I : a$ と $I + \langle a \rangle$ のそれぞれの Gröbner bases を計算する．しかもすべての計算を効率的な modular 演算で行うものである．

また，理論的な新しさとは別に，DCGB 計算は Suzuki-Sato の CGS 計算に貢献する可能性を持っている．そこで，この CGS 計算アルゴリズムに DCGB 計算を組み入れた実装を作成し，いくらかの計算実験を行い，部分的にだが貢献できることを詳しい timing data とともに示す．

本論文は以下のような構成である．第 2 節ではいくらかの記述に関する約束と CGS & CGB を定義し，DCGB を定義する．第 3 節では von Neumann regular ring とその上での Gröbner bases を定義し，DCGB との関連について述べる．第 4 節では Modular Dynamic Evaluation について概観し，本論文の主結果である von Neumann regular ring 上の quasi-inverse，および idempotent 演算の方法を与え，DCGB が von Neumann regular ring 上の多項式環で Buchberger アルゴリズムを実行することで得られることを示す．第 5 節では旧来の DCGB 計算アルゴリズムの困難な点を示し，Suzuki-Sato による CGS 計算アルゴリズムと，それに DCGB 計算を組み合わせた場合の比較 timing data をいくらかの例で示す．

2 CGB, CGS, and DCGB

本節では，本論文を通して使われるいくつかの数学的記述および，定義を述べる．

一般的に，f を多項式とし，$<$ を項順序 (term order) とするとき，$\mathrm{HT}_<(f)$ で f の $<$ に関する頭項 (head term) を表し，$\mathrm{HC}_<(f)$ で $\mathrm{HT}_<(f)$ の係数を表す．K, L は体とし，L は K の代数的閉包とする．$\bar{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $\bar{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ をそれぞれ不定元の集合とし，$\bar{A} \cap \bar{X} = \emptyset$ とする．$T(\bar{X})$，$T(\bar{A})$，$T(\bar{A}, \bar{X})$ をそれぞれ $\bar{X}$，$\bar{A}$，$\bar{A} \cup \bar{X}$ の単項 (terms) の集合とする．任意の $\bar{a} \in L^m$ に対して，正則な specialization homomorphism $\sigma_{\bar{a}} : K[\bar{A}] \longrightarrow L$ が定義できる．このとき $\sigma_{\bar{a}}$ は $f(\bar{A}) \in K[\bar{A}]$ に対して $\sigma_{\bar{a}}(f(\bar{A})) = f(\bar{a})$ である．また，$\sigma_{\bar{a}}$ は自然な方法で，homomorphism $\sigma_{\bar{a}} : (K[\bar{A}])[\bar{X}] \longrightarrow L[\bar{X}]$ と拡張できる．$K[\bar{A}]$ の部分集合 F に対して，F で定まる affine 多様体を $\mathbf{V}(F) \subset L^m$ と表し，

$$\mathbf{V}(F) = \{\bar{a} \in L^m \mid f \in F,\ f(\bar{a}) = 0\}$$

とする．また，F が有限集合で $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ となるときは，その affine 多様体を $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_k)$ とも表す．$f \in K[\bar{A}]$ と，有限集合 $G \subset K[\bar{A}]$，項順序 $<_{\bar{A}}$ に対して，$\mathrm{NF}_{G,<_{\bar{A}}}(f)$ で，f の $<_{\bar{A}}$ に関する G を法とした normal form の 1 つを表す．$\mathrm{NF}_{G,<_{\bar{A}}}(f)$ は一般に一意に決定するわけで

はないが，G が Gröbner basis のときは一意に決定する．また，イデアル $I \subset K[\bar{A}]$ に対して，剰余環 $K[\bar{A}]/I$ の元を $[f]_I$ で表す，G が I の Gröbner basis であるときは，$[f]_I = \mathrm{NF}_{G,<_{\bar{A}}}(f)$ で一意的に多項式表現できる．

定義 **1 (Comprehensive Gröbner System)**
F を $K[\bar{A}, \bar{X}]$ の部分集合とし，$S_1, \ldots, S_l$, $T_1, \ldots, T_l$ をそれぞれ $K[\bar{A}]$ の有限部分集合とする．このとき，有限集合 $\mathcal{G} = \{(S_1, T_1, G_1), \ldots, (S_l, T_l, G_l)\}$ が F の項順序 $<_{\bar{X}}$ に関する comprehensive Gröbner system であるとは，$(\mathbf{V}(S_1) \setminus \mathbf{V}(T_1)) \cup \cdots \cup (\mathbf{V}(S_l) \setminus \mathbf{V}(T_l)) = L^m$ かつ，任意の $\bar{a} \in \mathbf{V}(S_i) \setminus \mathbf{V}(T_i)$, $(i = 1, \ldots, l)$ に対して $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$ が $L[\bar{X}]$ のイデアル $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の $<_{\bar{X}}$ に関する Gröbner basis となるときのことを言う．また，各 (S_i, T_i, G_i) あるいは $(\mathbf{V}(S_i) \setminus \mathbf{V}(T_i), G_i)$ を $\mathcal{G}$ の segment と呼ぶ．

定義 **2 (Comprehensive Gröbner Bases)**
$G \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$ が F の $<_{\bar{X}}$ に関する comprehensive Gröbner basis であるとは，任意の $\bar{a} \in L^m$ に対して $\sigma_{\bar{a}}(G)$ が $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle \subset L[\bar{X}]$ の $<_{\bar{X}}$ に関する Gröbner basis となるときのことを言う．

定義 **3 (Discrete Comprehensive Gröbner Bases)**
F の $<_{\bar{X}}$ に関する CGS の segment (S, T, G) ($S,\ T \subset K[\bar{A}],\ G \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$) が discrete comprehensive Gröbner basis であるとは，$\mathbf{V}(S)$ が 0 次元多様体で $\mathbf{V}(T)$ が空集合となるときのことである．このときは特に (S, T, G) あるいは $(\mathbf{V}(S) - \mathbf{V}(T), G)$ を短く (S, G) あるいは $(\mathbf{V}(S), G)$ と表す．また，G を F の $<_{\bar{X}}$ に関する $\mathbf{V}(S)$ 上の discrete comprehensive Gröbner basis とも言う．

3 Gröbner Bases over Von Neumann Regular Rings and DCGB

DCGB 計算は，元来 von Neumann regular ring 上の Gröbner bases として定義されており，その計算法も von Neumann regular ring 上の Gröbner bases 計算で実現していた．本節では，可換な von Neumann regular ring R の定義を行い，R 上の多項式環 $R[\bar{X}]$ に単項簡約を定義する．そして，その単項簡約を用いて，$R[\bar{X}]$ における Gröbner basis の概念を定義する．また，その Gröbner basis 計算は体上の Gröbner basis 計算と同様に Buchberger アルゴリズムで得られる．より詳しくは，本特集号の鍋島氏の記事を参照されたい．

3.1 Von Neumann Regular Rings

定義 **4**
単位元 1 を持つ可換環 R が von Neumann regular ring であるとは，以下の性質を満足するときのことを言う．

任意の $a \in R$ に対して，ある $b \in R$ が存在し，$a^2 b = a$ を満足する．

また，このような b に対して，$a^* = ab$，$a^{-1} = ab^2$ と定義し，それぞれ a の idempotent, quasi-inverse と呼ぶ．

命題 **5**
R を von Neumann regular ring とし，$a \in R$ とする．このとき，それぞれ

$$aa^* = a, \qquad aa^{-1} = a^*, \qquad (a^*)^2 = a^*$$

が成立し，a^*, a^{-1} ともに一意的である．

証明　等式は計算で示す．$aa^* = a(ab) = a^2b = a$．$aa^{-1} = a(ab^2) = (a^2b)b = ab = a^*$．$(a^*)^2 = (ab)(ab) = (a^2b)b = ab = a^*$．続いて一意性を示す．$a$ の idempotent を $a_1^* = ab_1$, $a_2^* = ab_2$, $(a = a^2b_1 = a^2b_2,\ b_1 \neq b_2)$ とすると，$a_1^* = ab_1 = (a^2b_2)b_1 = (a^2b_1)b_2 = ab_2 = a_2^*$．故に a の idempotent は一意的．quasi-inverse の一意性も idempotent と同様に示せる．∎

3.2 Monomial Reductions and Gröbner Bases

以下で von Neumann regular ring R 上の多項式環 $R[\bar{X}]$ 上に単項簡約と Gröbner bases の概念を定義する．本節を通して，R は von Neumann regular ring とし，$T(\bar{X})$ 上の項順序 $<_{\bar{X}}$ は $R[\bar{X}]$ の多項式に適用するものとする．また，$f \in R[\bar{X}]$ に対して，f の頭係数の quasi-inverse $\mathrm{HC}_{<_{\bar{X}}}(f)^{-1}$ をかけたもの $f' = \mathrm{HC}_{<_{\bar{X}}}(f)^{-1} \cdot f$ を f の monic 化という．

定義 **6 (monomial reduction)**
$f, p \in R[\bar{X}]$ に対して，$f = a\bar{X}^\alpha + g'$, $(a \in R,\ \bar{X}^\alpha \in T(\bar{X})$ で $a\bar{X}^\alpha$ は f の頭項とは限らない）また，$f, p \neq 0$ とする．このとき，f が p を法として単項簡約可能であるとは，$a\bar{X}^\alpha$ に対して，ある $\bar{X}^\beta \in T(\bar{X})$ が存在し，$\bar{X}^\beta \cdot \mathrm{HT}_{<_{\bar{X}}}(p) = \bar{X}^\alpha$ かつ，$a \cdot \mathrm{HC}_{<_{\bar{X}}}(p) \neq 0$ のときをいい，

$$g = f - a \cdot \mathrm{HC}_{<_{\bar{X}}}(p)^{-1} \cdot \bar{X}^\beta \cdot p$$

を f の p による 1 回の単項簡約といい，これを $f \longrightarrow_p g$ と表す．

これより，部分集合 $P \subset R[\bar{X}]$ による $f \in R[\bar{X}]$ の単項簡約 $\longrightarrow_P$ が自然に定義できる．また，P が有限集合のときは $\longrightarrow_P$ による簡約鎖列は必ず停止する．この単項簡約を用いることで，Gröbner bases の概念を定義することができる．

定義 **7 (Gröbner bases)**
有限部分集合 $G \subset R[\bar{X}]$ が Gröbner basis であるとは，任意の $f \in \langle G \rangle$ に対して，$f \xrightarrow{*}_G 0$ を満たすときのことをいう．また，G がイデアル $I \subset R[\bar{X}]$ の Gröbner basis であるとは，任意の $f \in I$ に対して，$f \xrightarrow{*}_G 0$，かつ，$\langle G \rangle = I$ を満たすときのことをいう．

また，Sato [12] 補題 2.2，補題 2.3，補題 2.4 により，体上多項式環と同様に S 多項式により Gröbner bases を特徴付けることができる．ここで，$f, g \in R[\bar{X}]$ の S 多項式 $\mathrm{Spol}(f, g)$ とは，

$$\mathrm{HC}_{<_{\bar{X}}}(g)\frac{\mathrm{LCM}\left(\mathrm{HT}_{<_{\bar{X}}}(f), \mathrm{HT}_{<_{\bar{X}}}(g)\right)}{\mathrm{HT}_{<_{\bar{X}}}(f)} f - \mathrm{HC}_{<_{\bar{X}}}(f)\frac{\mathrm{LCM}\left(\mathrm{HT}_{<_{\bar{X}}}(f), \mathrm{HT}_{<_{\bar{X}}}(g)\right)}{\mathrm{HT}_{<_{\bar{X}}}(g)} g$$

のことである．

定理 **8**
有限部分集合 $G \subset R[\bar{X}]$ が Gröbner basis であることと，任意の 0 でない相異なる 2 つの多項式 $f, g \in G$ に対して，$\mathrm{Spol}(f,g) \xrightarrow{*}_G 0$ となることは必要十分である．

したがって，体上多項式環と同様に $R[\bar{X}]$ 上で Buchberger アルゴリズムを直接実行することができるが，それには R 上の quasi-inverse 計算が必要不可欠である．

3.3 Gröbner Bases over Von Neumann Regular Rings and DCGB

以下では von Neumann regular ring R 上で Gröbner bases 計算を行うことで DCGB が得られることを示す．まず，パラメータ空間を決定するイデアル $I \subset K[\bar{A}]$ が von Neumann regular ring を構成することを示す補題からはじめる．

補題 **9**
$K_1, \ldots, K_s$ をそれぞれ体とする．このとき，直積 $\boldsymbol{K} = K_1 \times \cdots \times K_s$ に自然な演算を定義すると，$\boldsymbol{K}$ は von Neumann regular ring を成す．

証明　任意の $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in \boldsymbol{K}$ に対して，$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_s)$ を

$$b_i = \begin{cases} \dfrac{1}{a_i} & \text{if } a_i \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

とすれば，$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ を満足する．したがって $\boldsymbol{K}$ は von Neumann regular ring を成す． ∎

系 **10**
$K_1, \ldots, K_s$ をそれぞれ体とし，$\boldsymbol{K} = K_1 \times \cdots \times K_s$ を von Neumann regular ring とする．任意の $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in \boldsymbol{K}$ に対して，$\boldsymbol{a}^* = (a'_1, \ldots, a'_s)$，$\boldsymbol{a}^{-1} = (a''_1, \ldots, a''_s)$ とすると，

$$a'_i = \begin{cases} 1 & \text{if } a_i \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad a''_i = \begin{cases} \dfrac{1}{a_i} & \text{if } a_i \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

となり，$\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{a}^{-1}$ ともに一意的である．

補題 **11**
$I \subset K[\bar{A}]$ を 0 次元根基イデアルとする．このとき，I の最短素イデアル分解を $I = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ とすると，

$$K[\bar{A}]/I \simeq K[\bar{A}]/P_1 \times \cdots \times K[\bar{A}]/P_s$$

であり，各 $K[\bar{A}]/P_i$，$(1 \leq i \leq s)$ は体であり，$K[\bar{A}]/I$ は von Neumann regular ring を成す．

証明　I は根基イデアルであるり，更に I が 0 次元イデアルであったから，I の最短準素イデアル分解の各 P_i, $(1 \leq i \leq s)$ は 0 次元素イデアルである．0 次元素イデアルは極大イデアルである．従って分解成分は互いに comaximal となるから Chinese remainder theorem により，

$$K[\bar{A}]/I = K[\bar{A}]/(P_1 \cap \cdots \cap P_s) \simeq K[\bar{A}]/P_1 \times \cdots \times K[\bar{A}]/P_s$$

となる．このとき，各 $P_i, (1 \le i \le s)$ は極大イデアルであったから $K[\bar{A}]/P_i, (1 \le i \le s)$ は体を成す．したがって補題 9 より $K[\bar{A}]/P_1 \times \cdots \times K[\bar{A}]/P_s \simeq K[\bar{A}]/I$ は自然な演算定義で von Neumann regular ring を成す． ∎

ここで，0 次元根基イデアル $I \subset K[\bar{A}]$ と $f = \sum_{i=0}^{k} a_i(\bar{A})\bar{X}^{\alpha_i} \in (K[\bar{A}])[\bar{X}]$，$(a_i(\bar{A}) \in K[\bar{A}])$ に対して，写像

$$\phi_I : K[\bar{A}, \bar{X}] \longrightarrow (K[\bar{A}]/I)[\bar{X}]$$

を

$$\phi_I(f) = \sum_{i=0}^{k} [a_i(\bar{A})]_I \bar{X}^{\alpha_i} \in (K[\bar{A}]/I)[\bar{X}]$$

で定める．ϕ_I は全射準同型写像である．以後，特に断りがない限り写像 ϕ_I は上の意味で用いることとする．

以下の定理は Sato [12] の定理 3.3 である．これは von Neumann regular ring 上の多項式環の Gröbner bases と DCGB との関連を記述する．

定理 **12 (Sato)**
$I \subset K[\bar{A}]$ を 0 次元根基イデアル．$F, G \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$ を有限部分集合とする．このとき $\phi_I(G)$ が $\langle \phi_I(F) \rangle \subset (K[\bar{A}]/I)[\bar{X}]$ の $<_{\bar{X}}$ に関する von Neumann regular ring 上の Gröbner basis ならば，G は $<_{\bar{X}}$ に関する $\mathbf{V}(I)$ 上の discrete comprehensive Gröbner basis である．

4 Computation of the Quasi-inverse and the Idempotent in a $K[\bar{A}]/I$

本節では，我々の主結果である$K[\bar{A}]/I$における quasi-inverse および idempotent 演算について述べる．まず Noro [8] による MDE の中心的役割を果たす命題からはじめる．

命題 **13**
$I \subset K[\bar{A}]$ を 0 次元根基イデアルとし，$I = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ を I の最短素 (極大) イデアル分解とする．$a \in K[\bar{A}]$ に対して，$A = \{i \mid a \in P_i,\ 1 \le i \le s\}$，$B = \{i \mid a \notin P_i,\ 1 \le i \le s\}$ とするとき，

1. $I : a = \bigcap_{i \in B} P_i$　　2. $I + \langle a \rangle = \bigcap_{i \in A} P_i$　　3. $I = (I : a) \cap (I + \langle a \rangle)$
4. $[a]_{I:a}$ は $K[\bar{A}]/(I : a)$ において単元である．

がそれぞれ成立する．

次の命題は，quasi-inverse，および idempotent 演算にとって決定的である．

命題 **14**
$I \subset K[\bar{A}]$ を 0 次元根基イデアルとし，$K[\bar{A}]/I$ を von Neumann regular ring と見なす．このとき，0 でない $a \in K[\bar{A}]$ に対して，$[b]_{I:a} = [a]_{I:a}^{-1}$ となる $b \in K[\bar{A}]$ が存在し，

1. $[ab]_I = [a]_I[b]_I$ は $[a]_I$ の idempotent である．
2. $[ab^2]_I = [a]_I[b]_I^2$ は $[a]_I$ の quasi-inverse である．

証明　まず，命題 13 の 4. から $[b]_{I:a} = [a]_{I:a}^{-1}$ となる $b \in K[\bar{A}]$ の存在は明らかである．したがって，$[a]_{I:a}[b]_{I:a} = [1]_{I:a}$ となるが，これは $ab - 1 \in I : a$ を意味する．したがってイデアル商の定義から，$a(ab-1) = a^2b - a \in I$ である．よって $[a^2b]_I = [a]_I^2[b]_I = [a]_I$ が成り立つ．結果的に $[b]_I$ は定義 4 における b の性質を満足していることになる．したがって，$[a]_I[b]_I$ は $[a]_I$ の idempotent であり，$[a]_I[b]_I^2$ は $[a]_I$ の quasi-inverse である． ∎

命題 14 により，$[a]_I \in K[\bar{A}]/I$ の quasi-inverse と idempotent 計算は $I : a$ と $[a]_{I:a}^{-1}$ を計算することにより可能であると分かる．Noro [8] では，$I : a$ の Gröbner basis と $[a]_{I:a}^{-1}$ を 1 回の計算で求める方法が示されている．以下にその結果だけをアルゴリズムとして示しておく．

Algorithm `INVERSE_OR_QUOTIENT`

`INPUT:` A Gröbner basis G of a zero-dimensional radical ideal $I \subset K[\bar{A}]$, a polynomial $a \in K[\bar{A}]$ representing an element of $K[\bar{A}]/I$, and a term order $<_{\bar{A}}$.

`OUTPUT:` $a_{inv} \in K[\bar{A}]$ such that $[a_{inv}]_I = [a]_I^{-1}$ if $[a]_I$ is invertible, otherwise the reduced Gröbner basis of $I : a$.

このアルゴリズム `INVERSE_OR_QUOTIENT` を用いることにより，以下の quasi-inverse 計算アルゴリズムが得られる．

Algorithm `QUASI_INVERSE`

`INPUT:` A Gröbner basis G of a zero-dimensional radical ideal $I \subset K[\bar{A}]$, a polynomial $a \in K[\bar{A}]$ representing an element of $K[\bar{A}]/I$, and a term order $<_{\bar{A}}$.

`OUTPUT:` A polynomial $a^{-1} \in K[\bar{A}]$ representing the quasi-inverse element of a.

```
BEGIN
    G_q ← INVERSE_OR_QUOTIENT(G, a, <_Ā);
    IF G_q is a polynomial THEN
        a^{-1} ← G_q;
    ELSE
        b ← INVERSE_OR_QUOTIENT(G_q, a, <_Ā);
        a^{-1} ← ab^2;
    END
    return a^{-1};
END
```

定理 **15**

$I \subset K[\bar{A}]$ を 0 次元根基イデアルとし，G を $<_{\bar{A}}$ に関する I の Gröbner basis とする．$K[\bar{A}]/I$ を von Neumann regular ring と見なすとき，$[a]_I \in K[\bar{A}]/I$ に対して，アルゴリズム `QUASI_INVERSE`$(G, a, <_{\bar{A}})$ は $[a]_I$ の quasi-inverse $[a]_I^{-1}$ の多項式表現 $a^{-1} \in K[\bar{A}]$ を出力する．

証明　もし，最初の `INVERSE_OR_QUOTIENT` が多項式を返し，それを $b \in K[\bar{A}]$ とすると，$[a]_I[b]_I = [1]_I$ であるから，$[b]_I$ は $[a]_I$ の quasi-inverse である．そうでない場合，G_q は多項式集

合であり，それは $I : a$ の $<_{\bar{A}}$ に関する Gröbner basis である．このとき，命題 13 により，$[a]_{I:a}$ の逆元は必ず存在する．したがって，INVERSE_OR_QUOTIENT$(G_q, a, <_{\bar{A}})$ は $[a]_{I:a}[b]_{I:a} = [1]_{I:a}$ を満足する多項式 $b \in K[\bar{A}]$ を出力する．このとき，命題 14 により，$[ab^2]_I = [a]_I[b]_I^2$ は $[a]_I$ の quasi-inverse である．結果的に $a^{-1} = ab^2$ は $[a]_I$ の多項式表現である． ∎

$[a]_I$ の idempotent 計算も quasi-inverse 計算と同様に行うことができる．

Algorithm IDEMPOTENT

INPUT: A Gröbner basis G of a zero-dimensional radical ideal $I \subset K[\bar{A}]$, a polynomial $a \in K[\bar{A}]$ representing an element of $K[\bar{A}]/I$, and a term order $<_{\bar{A}}$.
OUTPUT: A polynomial $a^* \in K[\bar{A}]$ representing the idempotent element of a.

```
BEGIN
    G_q ← INVERSE_OR_QUOTIENT(G, a, <_Ā);
    IF G_q is a polynomial THEN
        a* ← 1;
    ELSE
        b ← INVERSE_OR_QUOTIENT(G_q, a, <_Ā);
        a* ← ab;
    END
    return a*;
END
```

定理 **16**
$I \subset K[\bar{A}]$ を 0 次元根基イデアルとし，G を $<_{\bar{A}}$ に関する I の Gröbner basis とする．$K[\bar{A}]/I$ を von Neumann regular ring と見なすとき，$[a]_I \in K[\bar{A}]/I$ に対して，アルゴリズム IDEMPOTENT$(G, a, <_{\bar{A}})$ は $[a]_I$ の idempotent $[a]_I^*$ の多項式表現 $a^* \in K[\bar{A}]$ を出力する．

証明　定理 15 の証明と同様である． ∎

これにて，$F \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$ の $<_{\bar{X}}$ に関する $\mathbf{V}(I)$ 上の DCGB を計算する新しいアルゴリズムを示すことができる．以下のアルゴリズムは上で示した quasi-inverse 計算アルゴリズムを利用しており，von Neumann regular ring 上で直接 Buchberger アルゴリズムを実行するものである．

Algorithm DCGB

INPUT: A finite subset F of $K[\bar{A}, \bar{X}]$, a Gröbner basis $G_{\bar{A}}$ of a zero-dimensional radical ideal $I \subset K[\bar{A}]$, a term order $<_{\bar{A}}$, and a term order $<_{\bar{X}}$.
OUTPUT: A discrete comprehensive Gröbner basis G for F on $\mathbf{V}(G_{\bar{A}})$ with respect to a term order $<_{\bar{X}}$.

```
BEGIN
    G_I ← φ_I(F);
    Red ← ∅;
    FOR EACH f ∈ G_I DO
        Qi ← QUASI_INVERSE(G_Ā, φ_I^{-1}(HC_{<_Ā}(f)), <_Ā);
        Red ← Red ∪ {φ_I(Qi)f};
    END
    B ← {(f_1, f_2) | f_1, f_2 ∈ G_I, f_1 ≠ f_2};
    WHILE B ≠ ∅ DO
        (f_1, f_2) ← an element in B;
        B ← B \ {(f_1, f_2)};
        h ← Spol(f_1, f_2);
        h_0 ← MonicNF(h, Red, <_X̄);
        IF h_0 ≠ 0 THEN
            B ← B ∪ {(g, h_0) | g ∈ G_I};
            G_I ← G_I ∪ {h_0};
            Qi ← QUASI_INVERSE(G_Ā, φ_I^{-1}(HC_{<_Ā}(h_0)), <_Ā);
            Red ← Red ∪ {φ_I(Qi)h_0};
        END
    END
    G ← φ_I^{-1}(G_I);
    return G;
END
```

このアルゴリズムにおいて，$\mathtt{Spol}(f_1, f_2)$ は $f_1, f_2 \in (K[\bar{A}]/I)[\bar{X}]$ の S 多項式を計算する．

また，一般的に $f, g, p \in (K[\bar{A}]/I)[\bar{X}]$ による単項簡約 $f \longrightarrow_p g$ は必ず quasi-inverse $\mathrm{HC}_{<_{\bar{X}}}(p)^{-1}$ の計算を必要とする．一方で，アルゴリズム DCGB においては，reducer p は常に正規形計算された中間基底から選ばれる．もし，各中間基底がすべて monic 化されているならば S 多項式の正規形計算中の quasi-inverse 計算は不要であり，計算コストを減らすことができる．アルゴリズム内においては変数 *Red* は中間基底 G_I の多項式を monic 化したもので構成される．そして，$\mathtt{MonicNF}(h, Red, <_{\bar{X}})$ は $\longrightarrow_{G_I}$ に附随した正規形を *Red* を用いて quasi-inverse 計算なしで計算する．

5 Experiments

本節では，計算実験の結果について述べる．

5.1 Implementation

$\mathbb{Q}[\bar{A}, \bar{X}]$ 上で DCGB を計算する実装を計算機代数システム Risa/Asir [9] 上にユーザー言語である Asir 言語で書いた．実装には以下に示す工夫を盛り込んでいる．

- The Sugar strategy [2].
- Gebauer-Möller's useless pairs detection [1] on a von Neumann regular ring $K[\bar{A}]/I$.

- Göbner trace algorithm [15] on a von Neumann regular ring $K[\bar{A}]/I$.

本実装はいくつかの新しい組み込み関数を用いるため **Risa/Asir** の **version 20061129** 以降でなければ動作しないことを注意しておく．

実装および，その詳細に関する情報は以下の URL で得られる．

`http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kurata/jssac_dcgb/`

次項以降で示す timing data はすべて，OS: Debian GNU Linux，CPU: AthlonMP 1900+, RAM: 3GB の環境で計ったものである．また，時間計測は秒単位ですべて CPU 時間である．

5.2 Comparison with the Existing Method

$F \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$ の $\mathbf{V}(I)$ に関する DCGB を得るための $K[\bar{A}]/I$ での Gröbner basis 計算は，これまでは補題 11 を元にして以下の方法で計算していた．

1. 0 次元多様体の定義イデアル I の素分解 $I = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ を計算する．
2. 各 P_i, $(1 \le i \le s)$ に対して $\langle F \rangle$ の $K[\bar{A}]/P_i$ 上の Gröbner basis G_i を計算する．
3. 各 G_i, $(1 \le i \le s)$ を CRT で結合して，$K[\bar{A}]/I$ の Gröbner basis G_I を得る．

この方法では，定義イデアル I の素分解を必ず計算しなければならない．もしも，素分解のコストが高い場合は全体の計算効率に対して，この部分がボトルネックとなる可能性がある．

例 **17**

$$G_{\bar{A}} = \{A^{25} + A^{11}B^5 + 3A^3 - 1,\ B^{29} + A^{17}B^9 + 7AB^{11} - 1\}$$

は，0 次元根基イデアル $\langle G_{\bar{A}} \rangle \subset \mathbb{Q}[A, B]$ の Gröbner basis であり，代入パラメータ空間を定義するものとする．この条件のもとで，

$$\begin{aligned} F \quad = \quad & \{(AB-1)C_0C_1C_2C_3 - 1,\ ((C_1 + C_0)C_2 + C_0C_1)C_3 + C_0C_1C_2, \\ & (C_2 + C_0)C_3 + C_1C_2 + C_0C_1,\ C_3 + C_2 + C_1 + C_0\} \end{aligned}$$

の $\mathbf{V}(G_{\bar{A}})$ 上の辞書式順序 $C_0 > C_1 > C_2 > C_3$ に関する DCGB を計算する．

Algorithm	PD time	GB time	QI time	IP time	Total time
Existing	251.1s	3.3s	12.1s	32.3s	302.9s
New	–	29.9s	20.7s	–	39.5s

上の表において，“PD time”, “GB time”, “QI time”, そして “IP time” は，素イデアル分解の計算時間，各 $\mathbb{Q}[\bar{A}]/P_i$ 上の Gröbner bases 計算時間の総和，quasi-inverse 計算時間の総和，CRT による補間計算 (interpolation) 時間をそれぞれ表している．また，既存のアルゴリズムにおける quasi-inverse 計算は CRT で補間後の $\mathbb{Q}[\bar{A}]/I$ 上の Gröbner basis の各多項式を monic 化するために用いている．

この例では，“PD time” が既存の計算法においては支配的だが，新しい計算法ではそれを避けることができ，全体的な効率が上がっていることが観察される．

5.3 Suzuki-Sato Algorithm with the New Method

本項では，CGS を計算する Suzuki-Sato アルゴリズム [14] と，DCGB 計算の関連について述べ，いくつかの例で DCGB 計算が Suzuki-Sato アルゴリズムの効率化に貢献する実験結果を示す．

Suzuki-Sato アルゴリズムについての詳細は本特集号の鈴木氏の記事を参照されたい．Suzuki-Sato アルゴリズムにはいくらかのバリエーションが考えられるが，基本形は以下に示す再帰的アルゴリズムである．

Algorithm CGS

INPUT: A finite subset F of $K[\bar{A},\bar{X}]$ and a term order $<_{\bar{A},\bar{X}}$.
OUTPUT: A finite set $\mathcal{H}$ of triples (S,T,G) of a set of polynomials S and T in $K[\bar{A}]$, and a Gröbner basis G in $K[\bar{A},\bar{X}]$.

```
BEGIN
    G ← ReducedGroebnerBasis(F, <_{Ā,X̄});
    H ← {(F ∩ K[Ā], G ∩ K[Ā], {1})};
    IF 1 ∈ G THEN
        return H;
    END
    h ⟵ SquareFree( ∏_{g∈G\K[Ā]} HC_{<_X̄}(g) );
    {h_1, ..., h_l} ← Factors(h);
    H ← H ∪ {(G ∩ K[Ā], {h}, G \ K[Ā])};
    FOR i = 1, ..., l DO
        H ← H ∪ CGS(G ∪ {h_i}, <_{Ā,X̄});
    END
    return H;
END
```

この再帰過程で，パラメータ空間を定義する多様体が 0 次元になった場合は，それに該当する segment 計算に DCGB 計算を利用することができる．したがって，この考え方を適用すると以下の改良型アルゴリズムが考えられる．

Algorithm CGS_DCGB

INPUT: A finite subset F of $K[\bar{A},\bar{X}]$ and a term order $<_{\bar{A},\bar{X}}$.
OUTPUT: A finite set $\mathcal{H}$ of triples (S,T,G) of a set of polynomials S and T in $K[\bar{A}]$, and a Gröbner basis G in $K[\bar{A},\bar{X}]$.

```
BEGIN
    IF ⟨F ∩ K[Ā]⟩ is zero-dimensional THEN
```

```
        G_Ā ← ZeroRadical(F ∩ K[Ā], <_Ā);
        G ← DCGB(F \ K[Ā], G_Ā, <_Ā, <_X̄);
        H ← {(G_Ā, ∅, G)};
        return H;
    END
    G ← ReducedGroebnerBasis(F, <_Ā,X̄);
    H ← {(F ∩ K[Ā], G ∩ K[Ā], {1})};
    IF 1 ∈ G THEN
        return H;
    END
    IF ⟨G ∩ K[Ā]⟩ is zero-dimensional THEN
        G_Ā ← ZeroRadical(G ∩ K[Ā], <_Ā);
        G ← DCGB(G \ K[Ā], G_Ā, <_Ā, <_X̄);
        H ← H ∪ {(G_Ā, ∅, G)};
        return H;
    END
    h ⟵ SquareFree( ∏_{g∈G\K[Ā]} HC_{<_X̄}(g) );
    {h_1, ..., h_l} ← Factors(h);
    H ← H ∪ {(G ∩ K[Ā], {h}, G \ K[Ā])};
    FOR i = 1, ..., l DO
        H ← H ∪ CGS_DCGB(G ∪ {h_i}, <_Ā,X̄);
    END
    return H;
END
```

これらのアルゴリズムにおいて，ReducedGroebnerBasis$(F,<)$ は，$K[\bar{A},\bar{X}]$ のイデアル $\langle F\rangle$ の項順序 $<$ に関する reduced Gröbner basis を計算する．SquareFree(f) は多項式 f の K 上の無平方部分を計算する．Factors(f) で多項式 f の K 上の因数分解を計算し，Factors(f) の出力 $\{f_1,\ldots,f_l\}$ は f の素因子の集合である．ZeroRadical$(F,<)$ は K 上の 0 次元イデアル $\langle F\rangle$ の根基の項順序 $<$ に関する Gröbner basis を計算する．

上記の 2 つのアルゴリズムの実装を Risa/Asir 上に Asir 言語で作成した．一方はオリジナルに沿った実装 (cf. CGS) で，すべての Gröbner bases 計算を $\mathbb{Q}$ 上で行う．もう一方は DCGB 計算を組み合わせた実装 (cf. CGS_DCGB) である．また，実装上の性能差をなくすため，両方の実装で $\mathbb{Q}$ 上の Gröbner bases 計算 (ReducedGroebnerBasis$(F,<)$) で Risa/Asir の組み込み関数 dp_gr_main() を使用せずに独自の実装（DCGB 計算プログラム）を用いる．

以下に登場する表では，“Original” は Suzuki-Sato のオリジナルのアルゴリズムを，“with DCGB” は DCGB 計算を組み込んだアルゴリズムをそれぞれ意味する．“AC” は CGS に含まれる全 segment の数．“ZC” は CGS に含まれる segment のうち，0 次元多様体を持つものの数．“NZC time” と “ZC time” はそれぞれ，0 次元でない多様体を持つ segment と 0 次元多様体を持つ segment の Gröbner bases 計算時間の総和である．“Total time” は全計算時間の総和

である．

また，CGS，CGS_DCGB の実装では不要な segment を自動検出する機構を内蔵しており，この機構のために “AC – ZC” が “Original” と “with DCGB” で異なる場合がありうる．(cf. 例 22)

例 **18**

これは，[6] の Application 11.3 (the inverse kinematics problem for a simple robot) である．

$$\begin{aligned} F \quad = \quad & \{R - C_1 + L(S_1S_2 - C_1C_2),\ Z - S_1 - L(S_1C_2 + S_2C_1), \\ & S_1^2 + C_1^2 - 1,\ S_2^2 + C_2^2 - 1\} \end{aligned}$$

の辞書式順序 $S_1 > C_1 > S_2 > C_2$ に関する CGS を計算する．L, R, Z がパラメータである．

Algorithm	AC	ZC	NZC time	ZC time	Total time
Original	16	2	1.667s	0.038s	2.033s
with DCGB	17	3	1.671s	0.033s	2.084s

例 **19**

$f = X^3 + 2XYZ - Z^2 - S$，$g = X^2 + Y^2 + Z^2 - A$ に対して，

$$F = \{f,\ \frac{\partial f}{\partial X} + R\frac{\partial g}{\partial X},\ \frac{\partial f}{\partial Y} + R\frac{\partial g}{\partial Y},\ \frac{\partial f}{\partial Z} + R\frac{\partial g}{\partial Z},\ g\}$$

の辞書式順序 $X > Y > Z > R > S$ に関する CGS を計算する．A がパラメータである．

Algorithm	AC	ZC	NZC time	ZC time	Total time
Original	10	9	168.88s	24.55s	193.48s
with DCGB	10	9	170.59s	8.29s	178.90s

例 **20**

これは [14] の Example 2 である．

$$F = \{X^4 - A,\ Y^5 - B,\ X + Y - Z\}$$

の辞書式順序 $X > Y > Z$ に関する CGS を計算する．A, B がパラメータである．

Algorithm	AC	ZC	NZC time	ZC time	Total time
Original	15	1	83.70s	0.018s	84.02s
with DCGB	15	1	83.69s	0.016s	83.91s

例 **21**
これは [14] の Example 5 である．$f = (X-A)^2 + BY^2 + B$ に対して，

$$F = \{f - Z,\ X^2 + Y^2 + Z^2 - S,\ X + \frac{\partial f}{\partial X}Z,\ Y + \frac{\partial f}{\partial Y}Z\}$$

の辞書式順序 $X > Y > Z > S$ に関する CGS を計算する．A, B がパラメータである．

Algorithm	AC	ZC	NZC time	ZC time	Total time
Original	63	52	376.30s	1781.99s	2165.00s
with DCGB	39	28	357.87s	257.84s	628.45s

この例では，“Original” の効率の悪さは余計な 0 次元 segment をたくさん計算しているのが原因である．このようなことは “with DCGB” では起こりえない．例えば “Original” においては，ある 0 次元 segment の計算中に CGS() が 7 回以上も呼び出されているが，“with DCGB” では DCGB 計算を 1 回行うだけでアルゴリズムが停止する．

例 **22**
$f = (BX-1)^2 + A^2Y + A$ に対して，例 21 と全く同様の計算を行う．

Algorithm	AC	ZC	NZC time	ZC time	Total time
Original	19	10	345.58s	573.47s	919.80s
with DCGB	13	7	340.63s	1.34s	342.39s

この例での “Original” の効率の悪さの原因も例 21 と同様である．特にこの場合は “Original” において極めて計算時間のかかる 0 次元 segment が 2 つ現れるが，“with DCGB” においては現れない．

これらの例は，新しいアルゴリズムがオリジナルの CGS 計算にどのように貢献しているのかを示している．問題によっては CGS 計算において 0 次元 segment の計算時間が支配的になるものがあり，このような問題では計算時間の大幅な短縮に DCGB 計算は貢献できていると観察される．

6 Conclusion

これまでの DCGB 計算法はパラメータ空間を定義する 0 次元根基イデアルの素イデアル分解計算を必要としていた，それは quasi-inverse 計算の方法が分かっていなかったためである．同様に idempotent 計算の方法も分かっていなかったため CRT による補間計算を必要としていた．

本論文では，idempotent と quasi-inverse の両方の計算方法を与えた．そして $K[\bar{A}]/I$ 上の多項式環で Buchberger アルゴリズムを直接実行して DCGB が得られることを示した．その上，CGS 計算の Suzuki-Sato アルゴリズムに DCGB 計算を組み合わせることで改良できることが示せた．

最後に，今後の予定を記しておく．今回の仕事では MDE を用いて quasi-inverse 計算を行い，1 回の Buchberger アルゴリズムで DCGB を得る方法を提示したが，これに対して，DCGB の計算途中でアルゴリズムを分岐させる方法が考えられる．一般的に 0 次元根基イデアル $I \subset K[\bar{A}]$ と，$[a]_I \in K[\bar{A}]/I$ に対して $[a]_I$ が零因子である場合，基礎環の分解 $K[\bar{A}]/I \simeq (K[\bar{A}]/(I:a)) \times (K[\bar{A}]/(I+\langle a \rangle))$ が得られる．したがって，この性質を今回の DCGB 計算アルゴリズムに適用すると，新しい中間基底の元が計算され，その頭係数 $[a]_I$ が零因子であるたびに，それまでに得られた中間基底を $(K[\bar{A}]/(I:a))[\bar{X}]$ 上と $(K[\bar{A}]/(I+\langle a \rangle))[\bar{X}]$ 上に移して，それぞれで計算を続行する分岐アルゴリズムが考えられる．

この考え方では計算中に基礎環の分解が起こるが，最も細かく分解が起こったとしても補題 11 のような分解になり，無限に分解されていくわけではない．しかも入力された問題に応じて素イデアル分解を用いずに必要なだけの分解が動的に起こる．この分解により係数が“小さく”保たれる可能性が高まり，全体的な計算効率が上がる可能性がある．この詳細は今後の検討課題である．

また，今回の実装は Risa/Asir のユーザー言語である Asir 言語で書かれており，実用面から見ても全体的な実行速度に不満がある．したがって上記の考え方とともに実装を C 言語で書き直して Risa/Asir 組み込みにすることも予定している．

参 考 文 献

[1] Gebauer, R. and Möller, H.M. On an installation of Buchberger's algorithm. *J. Symbolic Computation*. Vol. 6/2-3, pp. 275–286. 1988.

[2] Giovini, A., Mora, T., Niesi, G., Robbiano, L. and Traverso, C. “One sugar cube, please” OR Selection strategies in the Buchberger algorithm. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '91)*. ACM Press, New York, pp. 49–54. 1991.

[3] Kurata, Y. and Noro, M. Computation of Discrete Comprehensive Gröbner Bases Using Modular Dynamic Evaluation. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '07)*. To appear. 2007.

[4] Manubens, M. and Montes, A. Improving the DISPGB algorithm using the discriminant ideal. *J. Symbolic Computation*. Vol. 41/11, pp. 1245–1263. 2006.

[5] Möller, H.M. On the Construction of Gröbner Bases Using Syzygies. *J. Symbolic Computation*. Vol 6/2-3, pp. 345-359. 1988.

[6] Montes, A. A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters. *J. Symbolic Computation*. Vol. 33/2, pp. 183–208. 2002.

[7] Nabeshima, K. A Direct Products of Fields Approach to Comprehensive Gröbner Bases over Finite Fields. *Proc. International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2005)*, IEEE Computer Society Press, pp. 39-47. 2005.

[8] Noro, M. Modular Dynamic Evaluation. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '06)*. ACM Press, New York, pp. 262–268. 2006.

[9] Noro, M. et al. A Computer Algebra System Risa/Asir.

http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html. 2007.

[10] Sato, Y. and Suzuki, A. Discrete Comprehensive Gröbner Bases. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '01)*, ACM Press, New York, pp. 292–296. 2001.

[11] Sato, Y., Suzuki, A and Nabeshima, K. ACGB on Varieties. *Proc. 6th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2003)*, pp. 313–318. 2003.

[12] Sato, Y. Stability of Gröbner bases and ACGB. *Proc. Algorithmic Algebra and Logic 2005 (Conference in Honor of the 60th Birthday of Volker Weispfenning)*, Books on Demand GmbH, pp. 223–228. 2005.

[13] Suzuki, A. and Sato, Y. An alternative approach to Comprehensive Gröbner Bases. *J. Symbolic Computation*. Vol 36/3-4, pp. 649–667. 2003.

[14] Suzuki, A. and Sato, Y. A Simple Algorithm to Compute Comprehensive Gröbner Bases Using Gröbner Bases. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '06)*, ACM Press, New York, pp. 326–331. 2006.

[15] Traverso, C. Gröbner trace algorithms. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '88)*, Springer-Verlag, London, pp. 125–138. 1988.

[16] Weispfenning, V. Gröbner bases for polynomial ideals over commutative regular rings. *Proc. EUROCAL '87*, Springer, LNCS Vol. 378, pp. 336–347. 1989.

[17] Weispfenning, V. Comprehensive Gröbner bases. *J. Symbolic Computation*. Vol 14/1, pp. 1-29. 1992.

[18] Weispfenning, V. Canonical Comprehensive Gröbner bases. *J. Symbolic Computation*. Vol 36/3-4, pp. 669-683. 2003.