数式処理 *J.JSSAC (2007)*
Vol. 13, No. 2, pp. 35 - 45

奨励賞論文

多項式スペクトル分解に付随するグレブナ基底の change of ordering について

木村欣司

JST・立教大学

(Received 2007/3/19)

1 はじめに

多項式スペクトル分解は，制御理論ではきわめて重要である．どのように役立つかは，他の論文に譲るとして本論文では，この多項式スペクトル分解に関連した計算を高速に遂行するための手法についてのみ議論する．

2 Quantifier Elimination の高速化としての意味づけ

2 変数以上の Quantifier Elimination(QE) を行うコストは，きわめて大きい．Virtual Substitution や Cylindrical Algebraic Decomposition を用いなければ解くことはできない．もし，与えられた問題が 1 変数の QE であるならば Sturm-Habicht 列によって，解くことができる．また，与えられた問題において 2 変数以上存在した場合にもグレブナ基底による変数の消去などによって 1 変数の QE に帰着できれば，計算量の削減という観点でその価値は極めて高い．このような視点で，グレブナ基底の change of ordering を議論することとする．ただし，ここでは一般の問題設定ではなく多項式スペクトル分解に付随するグレブナ基底を考える．よって，本論文の議論の一部については一般のグレブナ基底に応用できないものもある．以下では，その部分について特に注意することとする．

3 多項式スペクトル分解と shape form

多項式スペクトル分解には，さまざまな定義の方法がある．本論文での定義は，1 定義に過ぎないことをあらかじめ断る．

a_j は generic なパラメータとする．a_j が特別な関係をもつことを考慮した場合の例外処理については，佐藤らの近年の目覚しい研究の発展があるためにそちらに譲ることとする [5].

$$f(x) = (-1)^n(x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + a_0)$$

が，虚軸上に根がないとして（虚軸上に根がある場合は，例外処理としてみなすべきであるから）右半面の根を α_j とすると

$$f(x) = (-1)^n \prod (x - \alpha_j)(x + \alpha_j).$$
$$g(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$$

として，

$$f(x) = g(x)g(-x)$$

と分解することを考える．

$$g(x) = \prod (x + \alpha_j)$$

となる条件の下で分解する．すなわち，b_{n-1} が**実**最大値のときの分解を採用することに相当する．$g(s)$ の根は右半面にある．α_j には複素共役が存在しかつ，それは当然 $g(x)$ 側に存在しなければならない．すなわち，b_{n-1} に複素成分があってはならない．

a_j を与えられたパラメータとすると

$$f(x) = g(x)g(-x)$$

が恒等的に成立するという条件から，b_j の変数に対する非線形連立代数方程式が構成できる．さらに，その非線形連立代数方程式は**一切の計算をおこなうことなしに** degree reverse lexicographic ordering においてグレブナ基底になっている [4].

具体例をあげる．$n = 3$ において

$$f(x) = -(x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0)$$

として

$$g(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

とする．

$$f(x) = g(x)g(-x)$$

より

$$G = \left\langle \underline{b_0^2} + a_0, \underline{b_1^2} - 2b_0b_2 - a_2, \underline{b_2^2} - 2b_1 + a_4 \right\rangle \tag{1}$$

という非線形連立代数方程式に変形できる．b_{n-1} が**実**最大値のときを実現するパラメータを考えるためには b_{n-1} のみの式に変形せねばならない．また，**他の** $b_{j(j\neq n-1)}$ **を** b_{n-1} **で表すことができると実用上都合がよい．**それを実現する一手段として，shape form への変換がある．もちろん，RUR への変換でもよい．

ここでは，b_2 を分離化元とする shape form への変換結果を示す．

$$\begin{aligned}
&\Big\langle b_2^8 + 4a_4b_2^6 + (6a_4^2 - 8a_2)b_2^4 + (4a_4^3 - 16a_2a_4 + 64a_0)b_2^2 + a_4^4 - 8a_2a_4^2 + 16a_2^2,\\
&\underline{(2)}b_1 - b_2^2 - a_4,\\
&\underline{(8a_4^2 - 32a_2)}b_0 + b_2^7 + (4a_4)b_2^5 + (5a_4^2 - 4a_2)b_2^3 + (2a_4^3 - 8a_2a_4 + 64a_0)b_2\Big\rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

Opteron 285 dual，メモリ 16Gbyte のマシンの上での Risa/Asir では，nd_gr_main と dp_gr_main によって $n = 5$ までの shape form を計算できる．アルゴリズムは, 改良型 Buchberger アルゴリズムを単に呼び出すだけでよい.

4 最小多項式計算についての考察

shape form と RUR の両方が，最小多項式を含んでいるのではじめに最小多項式を計算することを考える．後の考察から b_2 の最小多項式を計算することは，次の行列の固有多項式を計算することに等しいことがわかる．よって，はじめにその立場から $n = 3$ の場合に b_2 の固有多項式を計算することを考える．もちろん，最小多項式を計算することでもある．グレブナ基底より線形基底を計算すると，$1, b_0, b_1, b_2, b_0b_1, b_1b_2, b_0b_2, b_0b_1b_2$ となることがわかる．これより，ベクトル $v = (1, b_0, b_1, b_2, b_0b_1, b_1b_2, b_0b_2, b_0b_1b_2)^\top$ を定める．b_2v の正規簡約の考えると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2a_2 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_2 & 0 & -4a_0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v \equiv b_2 v \mod G$$

となる．左辺の行列を A とすると，A の固有多項式は b_2 の最小多項式に他ならない.

つぎに，別の立場から b_2 の最小多項式を計算することを考える．まず，つぎの定理を導入する．

定理 1

G_0 は，項順序 $\prec_0$ に関する簡略グレブナ基底とし，p を $G_0 \subset \mathbf{Q}_{<p>}[X]$ となる素数とする．$f \in\subset \mathbf{Q}_{<p>}[X]$ に対し，$m_p(t) \in \mathrm{GF}(p)[t]$ を $\phi_p(f)$ の $< \phi_p(G_0) >$ に関する最小多項式とする．このとき，モニックな多項式 $m(t) \in \mathbf{Q}_{<p>}[t]$ が存在して，

$$\deg(m(t)) = \deg(m_p(t)) \quad \text{かつ} \quad m(f) \in < G_0 >$$

ならば，$m(t)$ は f の $< G_0 >$ に関する最小多項式となる．

定理は，さらに拡張される．G_0 にパラメータが含まれている場合には，頭係数が消えないようなパラメータへの数値の代入は許される．

よって，はじめに有限体 GF(p) 上において最小多項式を計算する．すると，最小多項式は

$$b_2^8 + c_6b_2^6 + c_4b_2^4 + c_2b_2^2 + c_0 = 0, \tag{3}$$

と仮定すべきであるという指針が得られる．少なくとも，8 次以上であるという結果は有限体の最小多項式の情報から得られる．（**偶数次の項のみ，0 でないことがこの問題の特徴である．**こ

こでは，有限体 GF(p) の最小多項式の情報からこのような仮定を置いたので，その仮定は正しくないかもしれない．しかし，その正当性は次の最小多項式の構成法の過程から証明される.）b_2^j を正規簡約するとそれはかならず

$$b_2^j \to d_{0,j} + d_{1,j}b_0 + d_{2,j}b_1 + d_{3,j}b_2 + d_{4,j}b_0b_1 + d_{5,j}b_1b_2 + d_{6,j}b_0b_2 + d_{7,j}b_0b_1b_2$$

という形になる．よって、式（3）は次のように書き換えられる，

$$[1, b_0, b_1, b_2, b_0b_1, b_1b_2, b_0b_2, b_0b_1b_2] \left(d_{i,j} | i, j = 0, ..., 7\right) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_7 \end{pmatrix} =$$

$$[1, b_0, b_1, b_2, b_0b_1, b_1b_2, b_0b_2, b_0b_1b_2] \begin{pmatrix} d_{0,8} \\ \vdots \\ d_{7,8} \end{pmatrix}.$$

恒等的に成立することから，

$$\left(d_{i,j} | i, j = 0, ..., 7\right) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{0,8} \\ \vdots \\ d_{7,8} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

c_j の j が奇数の場合には 0 であるから，この線形方程式系は過剰決定系である．この線形方程系式系をみたす解があるということは，G に偶数項のみをもつ b_2 の 8 次の最小多項式が存在することを意味する．また，この定式化は線形方程式系の問題への帰着であるから適当な解の候補を生成したのち式（4）を用いてその解の正当性を示すことができるわけである．（左辺から右辺を引いて 0 になればよい.）有限体 GF(p) の最小多項式の次数と行列サイズが等しいため，b_2 の最小多項式と A の固有多項式が等しいことがわかる．さらに，A の固有多項式の計算も単に**候補**を求めればよい．なぜならば，その正当性は式（4）を用いて示すことができるからである．一般に A の固有多項式と b_2 の最小多項式が一致するとは限らないことを注意する．

5　行列の固有多項式の計算

5.1　多変数多項式を要素とする行列の行列式の評価公式

定理 2 ([3])

多変数多項式の 1 ノルムは，係数の絶対値の総和と定義する．

$$\begin{pmatrix} \|a_{1,1}\|_1 & \dots & \|a_{1,n}\|_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \|a_{n,1}\|_1 & \dots & \|a_{n,n}\|_1 \end{pmatrix}$$

として Hadamard の公式を適用する．そのときの値を H_1 とすると

$$\text{多変数多項式を要素とする行列の行列式の係数の絶対値最大} \le H_1$$

が成立する．

この定理の系として固有多項式の係数についての評価公式が得られる．**しかし，この問題ではこのような評価公式は必要ない．候補を計算すればよいのであるから，stable になった時点で計算を終了すればよい．**

5.2 行列式における各変数の次数についての bound

与えられた行列 A の固有多項式 $p(t)$ を計算する問題を考える．その結果における次数の bound は，最も単純な計算では次のようになる．行列 A を例に考える．A の固有多項式の各変数についての bound を考える．

variable	parameter	total degree
a_0	a_2, a_4, t	1
a_2	a_0, a_4, t	2
a_4	a_0, a_2, t	4
t	a_0, a_2, a_4	8
a_0, a_2	a_4, t	2
a_2, a_4	a_0, t	4
a_4, a_0	a_2, t	4

variable	parameter	total degree
a_0, t	a_2, a_4	8
a_2, t	a_0, a_4	8
a_4, t	a_0, a_2	8
a_0, a_2, a_4	t	4
a_0, a_2, t	a_4	8
a_2, a_4, t	a_0	8
a_4, a_0, t	a_2	8
a_0, a_2, a_4, t		8

この表をもとにして bound を計算する．t の次数 j の項については variable に t が含まれている部分の行から j を引けばよい．**しかし，この問題ではこのような bound の表を作る必要はない．**候補を計算すればよいのであるから，よりタイトな bound の計算の方法が考えられる．a_0 の t の次数 j の項における total degree bound を計算する場合には，a_2, a_4 には適当な数値を代入し $a_0 = \alpha$ として有限体 GF(p) においてガウスの消去法の拡張による上 Hessenberg 行列への変形を用いて固有多項式を計算し（次の節で詳細を記す），α についての補間をおこなえばよい．α の次数が stable になった時点で，total degree bound が得られる．a_0, a_2 の t の次数 j の項における total degree bound を計算する場合には，$a_0 = a_2 = \alpha$ とすればよい．

5.3 ガウスの消去法の拡張による上 Hessenberg 行列への変形

最小多項式の次数が行列サイズに満たない場合にも利用できる算法を紹介する．行列 A の成分を $a(i, j)$ とする．n を行列サイズとし pivot の成分を $a(k, k)$ とすると

$$\alpha = \frac{a(i,k)}{a(k,k)}$$
$$a(i, j) \leftarrow a(i, j) - \alpha a(k, j) \quad j = k + 1, ..., n$$

として消去法をおこなうのがガウスの消去法であるが，この行消去を行ったあと

$$a(m, k) \leftarrow a(m, k) + \alpha a(m, i) \quad m = 1, ..., n$$

として列に対して行を消去したときに用いた量を足しこみ固有値を不変にする算法である．さらに，上 Hessenberg 行列から有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の固有多項式が計算できる [3]．さらに，Newton 補間（後の節で詳細を述べる）と係数についての中国剰余定理を用いて多パラメータをもつ行列

の固有多項式が計算できる．ガウスの消去法の拡張を利用して固有多項式を計算する代わりに Danilevsky 法を用いて有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の固有多項式を計算することもできる [1].

6 行列の最小多項式の計算

6.1 クリロフ部分空間法 I

有限体 GF(p) 上の最小多項式は，Berlekamp-Massey 法を用いて計算できる．Newton 補間（後の節で詳細を述べる）と係数についての中国剰余定理を用いて，行列の最小多項式の**候補**を計算する．この問題の場合には，式（4）があるため候補でよい．

6.2 クリロフ部分空間法 II

v を乱数ベクトルとして $A^k v$ を有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ではなく元の体（この問題では，有理関数体）で計算し

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} v & Av & \cdots & A^{n-2}v & A^{n-1}v \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = -A^n v \tag{5}$$

を多パラメータを復元する Hensel 構成（詳細は，後に解説する）で解く [3]．この問題では，式（5）を解くことが，式（4）を解くことに比べて容易になることはないので，本論文では採用しない．

7 要素に多パラメータをもつ連立一次の解法

要素に多パラメータをもつ連立一次方程式の求解において，常に高速に計算が可能となる算法は確立されていない．しかし，**解が有理式でなく多項式である**ことがあらかじめ**予想できる**問題については十分に効率のよい方法が考えられる．行列 A の要素に有理式の成分が存在しないため（n が増加してもグレブナ基底の頭項が 1 であるため，この主張は n に関係なく正しい），固有多項式の t の係数には有理式は存在しない．よって，最小多項式の係数にも有理式は存在しない．ゆえに，式（4）の解は多項式である．

7.1 Hensel 構成による解法

$Au = b$ を Hensel 構成で解くことを考える．ただし，A, b の成分は多変数多項式である．また，この論文で扱うこの問題の特徴として解 u も多項式であることがわかっているとする．

まず，写像 π によって，より簡単な問題に帰着させた後引き戻しをおこなう．

写像は，2 種類を利用する．

1. π_p は，有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に問題を射影することを意味する
2. $\pi_{x_i \to c_i}$ は，x_i の c_i における問題に射影することを意味する

これらを用いて問題をより簡単な問題に帰着させるわけであるが引き戻しは，1 通りでないことを注意しておく．変数の数を m として，それぞれの引き戻しを π_p^{-1} と $\pi_{x_i \to c_i}^{-1}$ と書くとすると，

1. $(\pi_{x_1 \to c_1}^{-1})(\pi_{x_2 \to c_2}^{-1}) \ldots (\pi_{x_m \to c_m}^{-1})(\pi_p^{-1})$

2. $(\pi_p^{-1})(\pi_{x_1\to c_1}^{-1})(\pi_{x_2\to c_2}^{-1})\ldots(\pi_{x_m\to c_m}^{-1})$

すなわち，先に体 $\mathbb{Q}$ に復元をした後，それぞれの変数のついての情報を体 $\mathbb{Q}$ についての Hensel 構成によって復元するか（この復元の途中では，再び $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の問題を解くことになるが），逆に，先にそれぞれの変数のついての情報を体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ について復元した後，後に体 $\mathbb{Q}$ に復元する（この復元の途中では，再び $\pi_{x_i\to c_i}$ の問題を解くことになるが）という自由度がある．本論文では，後者の選択肢を採用することとする．もちろん，変数については同時に引き戻す方法も存在する．イデアル $I =< x_1 - c_1, x_2 - c_2, \ldots, x_m - c_m >$ を用意する．$Au_{0,0} = b \bmod I$ を解いたのち，$b - Au_{0,0}$ を計算する．そのとき，$b - Au_{0,0}$ は $b - Au_{0,0} = (x_1 - c_1)v_1 + \ldots + (x_m - c_m)v_m$ のように書くことができる．次に，$A(u_0 + u_{1,1}(x_1 - c_1) + \ldots + u_{1,m}(x_m - c_m)) = b \bmod I^2$ を整理すると $A(u_{1,1}(x_1 - c_1) + \ldots + u_{1,m}(x_m - c_m)) = (x_1 - c_1)v_1 + \ldots + (x_m - c_m)v_m$ となり，両辺を比較することで $Au_{1,1} = v_1, \ldots, Au_{1,m} = v_m$ を解けばよいことがわかる．以下，これを繰り返す．この算法も有用であるが，本論文では採用しない．

7.2 Newton 補間による解法

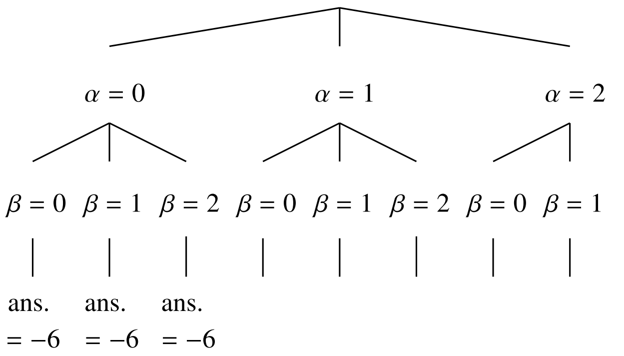
固有方程式の場合と同様に，クラーメルの公式を利用して解の bound を構成することができるが，本論文では**候補**を生成すればよいだけであるためそのようなことはしない．固有方程式の場合と同様に，特定の 1 変数の Newton 補間によって次数の適当な上限を計算することで，support を計算することができる．具体的な Newton 補間の方法について例を用いて示す．α のみを変数と見る場合の total degree，β のみを変数と見る場合の total degree，α, β 両方を変数と見る場合の total degree については stable 状態での停止を基準としてあらかじめ計算してあるものとする．それらの計算により，連立一次方程式の解のある要素が

$$\begin{aligned}&(c_0 + c_1\beta + c_2\beta(\beta - 1)) + \alpha(c_3 + c_4\beta + c_5\beta(\beta - 1))\\&+\alpha(\alpha - 1)(c_6 + a_7\beta + c_8\beta(\beta - 1)), \quad c_8 = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

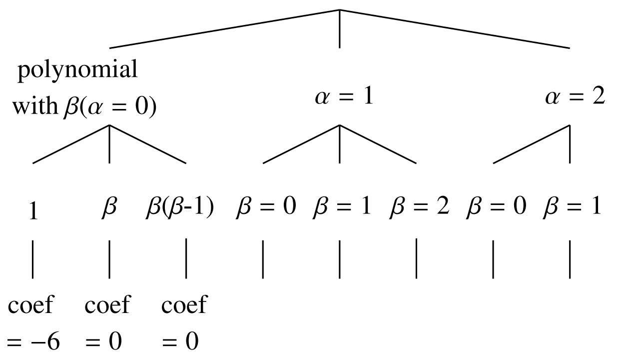
と仮定できるとする．

7.2.1 計算手順

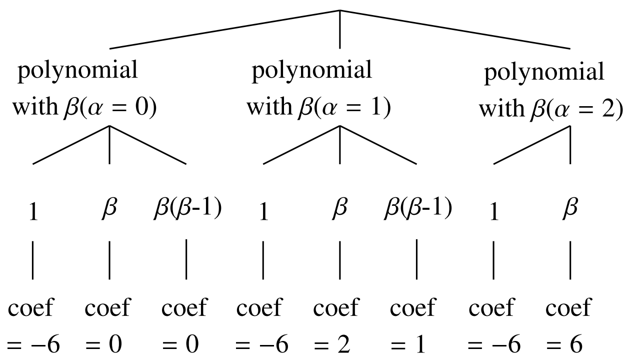
ここでは説明のため $\mathbb{Q}$ 上で計算するが，実際のプログラムでは $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を利用して計算する．
(6) から次の木を作り，$\alpha = 0$ において LU 分解を利用して $\beta = 0, 1, 2$ のそれぞれの場合の連立一次方程式の解を計算する [3].



$\alpha = 0$ において Newton 補間をする

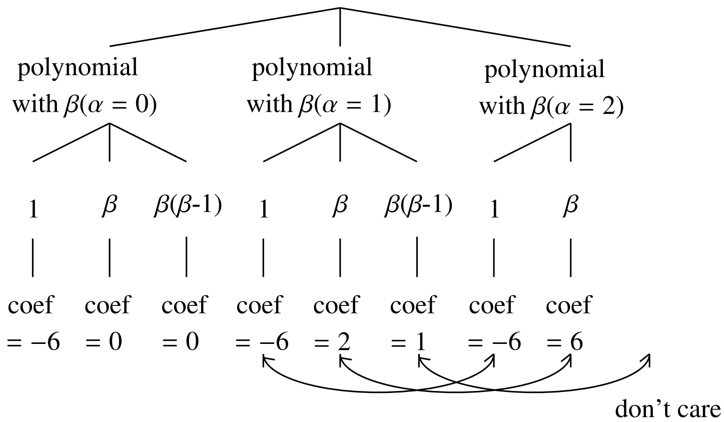


$\alpha = 1$, $\alpha = 2$ においても同様の計算をおこなう.

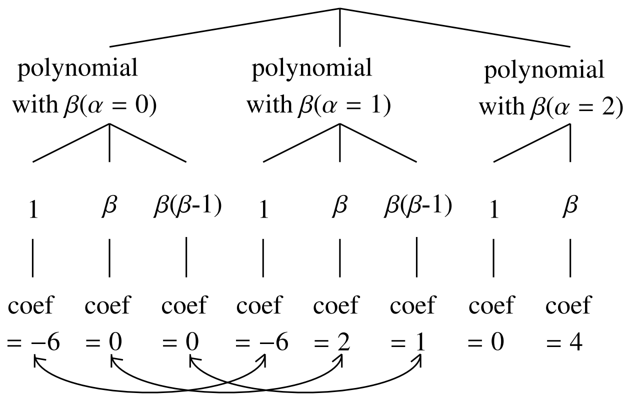


$\beta = 2$ の多項式は，あえて次数 1 で打ち切っている．**Newton 補間は逐次補間であるためこのような途中で打ち切ったものを入力としても正しい計算ができる．**

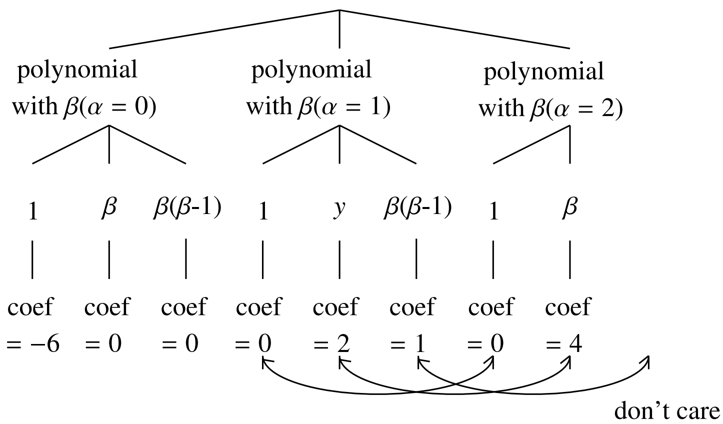
ここからは，多項式を入力として Newton 補間をする．まず，$\alpha = 2$ の多項式から $\alpha = 1$ の多項式を引いてそれを再度 $\alpha = 2$ に格納する．



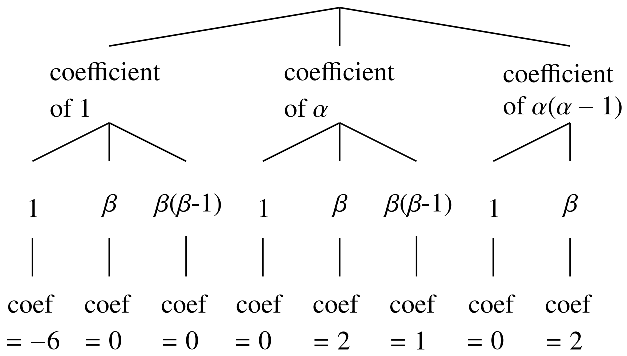
つぎに，$\alpha = 1$ の多項式から $\alpha = 0$ の多項式を引き，その結果を $\alpha = 1$ に格納する．



最後に $\alpha = 1$ の多項式から $\alpha = 0$ の多項式を引くと多項式における Newton 補間が完成する．



以上より，つぎのような結果になる．



この計算を，連立一次方程式の解の各成分において行えばよい.

8　shape form への変換

$n = 3$ の shape form (2) の最小多項式以外の構成要素の頭項は 1 ではない．よって，shape form の最小多項式以外の構成要素を連立一次方程式とその Hensel 構成による解法または Newton 補間による解法で求めることは極めて困難である．しかし，つぎのように最小多項式以外の構成要素の頭項を求めることができる．a_0, a_2, a_4 に数値を代入し，有限体 GF(p) 上の改良型 Buchberger アルゴリズムにより shape form を計算する．後に，それぞれの変数について Newton 補間と中国剰余定理を用いて頭項の**候補**を計算できれば最小多項式をもとめるための連立一次方程式の解は，多項式に変換することができる．しかし，有限体 GF(p) 上の改良型 Buchberger アルゴリズムにより shape form を計算することが高速であるとは限らない．また，Newton 補間と中国剰余定理のための回数も無視できないほどに多い.

9　RUR への変換

$n = 3$ の場合，b_2 の最小多項式 $m(b_2)$ を含む RUR は，

$$\{m(b_2), m'(b_2)b_0 - h_1(b_2), m'(b_2)b_1 - h_2(b_2)\}$$

という形になる [2]．この形式における連立一次方程式への帰着の方法は，[2] を参照されたい．一般に，$h_i(b_2)$ は b_2 の多項式となることが確定している．しかし，その係数がグレブナ基底中のパラメータに対して多項式となるとは限らない．もし，パラメータに対して多項式とならなければ多変数の場合には Hensel 構成を使う意味は，ほぼ存在しない．しかし，この問題の場合には $n \leq 6$ については，$h_i(b_2)$ の係数についてパラメータに対して多項式となることが計算の結果から判明した．$h_i(b_2)$ の係数がグレブナ基底中のパラメータに対して多項式となる理由の解析はこれからの課題ある.

10　タイミングデータ

実験環境は，Opteron 285 dual，メモリ 16Gbyte のマシンを用いて行った．$n = 6$ の場合を考える．Berlekamp-Massey 法を用いて最小多項式を計算し定数項 c_0 についてのみ補間を行う場合、10 分 25 秒の計算時間を必要とした．ガウスの消去法の拡張による上 Hessenberg 行列への変形を用いて固有多項式を計算し定数項 c_0 についてのみ補間を行う場合、9 分 0 秒をその計算

のために必要とした．これらは，いずれも C 言語による実装である．それに対して，最小多項式を求める問題を連立一次方程式の求解の問題に帰着させ，Risa/Asir のユーザー言語を用いて Hensel 構成により c_j のすべての変数について解を求めると，7 分 18 秒で計算することができた．それとは別に，連立一次方程式の求解の問題を Newton 補間の問題で解くと定数項 c_0 については，5 分 46 秒で計算が可能であった．すべての変数について，効率よく Newton 補間するプログラムの作成はこれからの課題である．よって，最小多項式を求める問題を連立一次方程式の求解の問題に帰着させることは解があらかじめ多項式と予想できる問題であるならば極めて有用な手段と考えられる．shape form への変換は，この問題については現在のところ実時間では可能でないことがわかったのでここでは省略する．RUR については，最小多項式を求める問題を連立一次方程式の求解の問題に帰着させ，Risa/Asir のユーザー言語を用いて Hensel 構成により求めた．計算時間は，各 RUR に対して b_4 に 10 分 11 秒，b_3 に 11 分 33 秒，b_2 に 10 分 50 秒，b_1 に 11 分 23 秒，b_0 に 9 分 42 秒をそれぞれ必要とした．

参考文献

[1] 有本卓，数値解析（I），コロナ社，東京，1997.

[2] 野呂正行，横山和弘: グレブナ基底の計算 基礎篇，東京大学出版会，東京，2003.

[3] 木村欣司，多項式行列の行列式の補間による計算 II，京都大学数理解析研究所講究録 1514 「Computer Algebra-Desingn of Algorithms, Implementations and Applications」，2005, pp.176-182.

[4] M. Kanno, H. Anai and K. Yokoyama, On the Relationship between the Sum of Roots with Positive Real Parts and Polynomial Spectral Factorization (key lecture), Proceedings of the Sixth International Conference on Numerical Methods and Applications NM&A'06, Lecture Notes in Computer Science, Bulgaria, 2007, pp. 320-328.

[5] A. Suzuki and Yosuke Sato, A Simple Algorithm to Compute Comprehensive Grobner Bases Using Grobner Bases, Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation(ISSAC 2006), ACM Press, 2006, pp 326-331.