

数式処理システムを利用した高校生や 大学初年級の生徒による数学研究

宮寺良平* 峰松大介 橋場諭 小寺康史 表具明宏
松井啓史 中川裕太 橋場友秀 近藤泰司 池田陽介
井上貴文

(RECEIVED 2006/7/6)

この論文において紹介する数学教育は、教師がサポートしながら高校生や大学初年級の生徒が数式処理システムを使って研究することである。ここで研究とは、文字通り数学的に新しい事実を見つけることを意味する。

まず問題となるのは、そのようなことが可能であるのかである。世界全体を見ても、特別な天才が高校生時代に定理を発見したということは報告されているが、定理を発見することを普通の高校生を対象とした教育で行うことは、発見学習に詳しいニューヨーク市立大学の数学者 Robert Cowen 教授によると、世界でも例がない。大学の学部レベルでも MIT などの少数の大学で、極めて優れた学生を対象に行われているだけである。Cowen 教授は高校生を対象として、組み合わせゲームの集中講義を行い、新しい事実を発見させたことがある。このこと自体でも非常に珍しいことであるが、著者達が行ったように、多数の高校生が長い期間、研究を続けて成果を出すという試みは世界的に見ても先事例を持っていない。

そのような理由から、この論文の第一の目的は高校生達に数学の研究が可能であることを示すことにある。可能であることを前提としなければ、方法論自体が意味のないものになる。

ここで紹介するのは、関西学院高等部での選択授業と課外活動の中で行われた数学研究の実践の一部である。この実践は8年の歴史があり、多くの新しい数学的事実が発見されている。生徒たちが見つけた数学的に新しい事実を、紹介しながら、生徒の研究過程を報告する。

ここで紹介する「 $(a+b)^n$ によってできる美しい図形は」、イタリアの数学雑誌 Archimede において、[1] として発表し、「999999999ⁿ の形の数によってできる美しい図形」はセルビアの Online 数学雑誌 Visual Mathematics に、[2] として発表したものである。数学としては、既に発表した内容であるが、この論文においては、数式処理システムを使った教育として、数学的な内

*関西学院 miyadera1272000@yahoo.co.jp

容を示しながら説明したい。

また、「パスカルのな三角形から作られる数列 1, 2」と「循環数と根号」は、生徒たちが興味深い事実を見つけて、今研究している最中のものである。まだ決定的な結果は出ていないが、どのように研究が進んでいくかを理解していただくには良い例だと考える。

ここでは数式処理システムの Mathematica を使ったが、他のシステムを使う場合でも、ほぼ同じことが可能だと考える。しかし、これらの事実は数式処理システムがなければ発見することができなかつたと考える。例えば、次数の大きな二項展開や、何千という桁数の計算、そして平方根の計算で平方数を根号の外に出すという操作などは、普通のコンピュータ言語では手軽に扱うことはできない。従って、私たちの行なっている数学教育は、数式処理システムを前提としている点で、ユニークである。数式処理システムは、コンパイル言語に比べて数値計算の速度が遅い場合があるが、そのことは問題にはならなかつた。大規模なシミュレーションならば別だが、著者達が行なったような数学の研究では、問題を見つけるとすぐにプログラムを作り、法則性を見つけるために必要なデータを計算機に作らせる。そのためのデータは、現代の計算機ならば、あまり負担のない程度の大きさである。ただ、早くプログラムを作るためには、数式処理システムが多くの変数や、リスト操作のコマンドを持っていることが必要になる。

授業の進め方は、著者の一人である宮寺が、面白いと思える問題を選んできて、考えさせる。時には、数式処理システムの変数で遊ぶというような時間もある。問題の選択の基準は、発展性があるということである。生徒が高校生主体であるため、組み合わせ論や数理パズルに関するような問題が多い。問題集などを使う場合は、優れた数学者の手によるものを使うようにしている。この論文の著者は、宮寺を除くと、すべて宮寺の生徒である。峰松以外は、すべて高校生であるときに研究に参加している。峰松は高校生のときに参加し、大学生になってからは、宮寺と共にこの研究プロジェクト責任者となっている。

この論文のほとんどの発見は生徒達によるものである。この論文は宮寺による教育実践の報告と同時に、生徒達の発見した数学的事実の発表を目的にしている。

1 $(a + b)^n$ によってできる美しい図形

数式処理システムの Mathematica を使った授業で、生徒に数式の展開をさせて遊ばせた。すると、著者の一人である小寺が $(a + b)^n$ を展開し、自然数 n をだんだんと大きくした。これ以後実名で登場するのは、すべてこの論文の著者である。

例 1 $(a + b)^{40}$ を展開すると表 1 ようになる。

注意 1

$(a + b)^n$ を Mathematica のコマンド `Expand[]` で展開しただけでは、表 1 のような式は出力されない。しかし指数が大きい場合には、このような形を予想させる式が出力される。それをもっと見やすくするために、式を上のように並べた。このような数式の形は、数式処理システムを使っている人には馴染みのあるもので、宮寺も、気に留めることはなかつた。しかし全く経験が無い高校生にとっては、新鮮な驚きであったようで、この形が何か意味を持っているのではないかと

表 1:

$$\begin{aligned}
 &a^{40} \\
 &40a^{39}b^1 \\
 &780a^{38}b^2 \\
 &9880a^{37}b^3 \\
 &91390a^{36}b^4 \\
 &658008a^{35}b^5 \\
 &3838380a^{34}b^6 \\
 &18643560a^{33}b^7 \\
 &76904685a^{32}b^8 \\
 &273438880a^{31}b^9 \\
 &847660528a^{30}b^{10} \\
 &2311801440a^{29}b^{11} \\
 &5586853480a^{28}b^{12} \\
 &12033222880a^{27}b^{13} \\
 &23206929840a^{26}b^{14} \\
 &40225345056a^{25}b^{15} \\
 &62852101650a^{24}b^{16} \\
 &88732378800a^{23}b^{17} \\
 &113380261800a^{22}b^{18} \\
 &131282408400a^{21}b^{19} \\
 &137846528820a^{20}b^{20} \\
 &131282408400a^{19}b^{21} \\
 &113380261800a^{18}b^{22} \\
 &88732378800a^{17}b^{23} \\
 &62852101650a^{16}b^{24} \\
 &40225345056a^{15}b^{25} \\
 &23206929840a^{14}b^{26} \\
 &12033222880a^{13}b^{27} \\
 &5586853480a^{12}b^{28} \\
 &2311801440a^{11}b^{29} \\
 &847660528a^{10}b^{30} \\
 &273438880a^9b^{31} \\
 &76904685a^8b^{32} \\
 &18643560a^7b^{33} \\
 &3838380a^6b^{34} \\
 &658008a^5b^{35} \\
 &91390a^4b^{36} \\
 &9880a^3b^{37} \\
 &780a^2b^{38} \\
 &40a^1b^{39} \\
 &b^{40}
 \end{aligned}$$

いう疑問を持った．いろいろ試してみて，指数を大きくすると一定の相似形に近づくという予想ができた．証明は次の2つの補題と1つの定理からなる．

補題 2

十分大きい自然数 n, t が $t < n$ を満たす時，次の式が成立する．

$$\frac{\log_{10} t!}{n} \sim \frac{t \log_{10} t - t \log_{10} e}{n}$$

(ここで， \sim は n, m が十分大きいときに，近似的に等しいということの意味する．)

証明 自然数 t に対してスターリングの公式を使うと，次の式が成り立つ．

$$\frac{\log_{10} t!}{n} \sim \frac{\log_{10}(\sqrt{2\pi t} t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t})}{n}$$

$$\sim \frac{t \log_{10} t - t \log_{10} e}{n},$$

ここで, n が十分に大きいときは, $\log_{10} \sqrt{2\pi}$ と $\frac{1}{2} \log_{10} t$ が n に比べて非常に小さいことを使っている. ■

補題 3

$\frac{m}{n}$ の大きさをほぼ一定に保ちながら, n, m を十分に大きくすると, 次の式を得る.

$$\frac{\log_{10} {}_n C_m}{n} = -\left(\frac{n-m}{n} \log_{10} \left(\frac{n-m}{n}\right) + \frac{m}{n} \log_{10} \left(\frac{m}{n}\right)\right)$$

証明 $\frac{m}{n}$ の大きさは一定で, n, m は十分大きいとするので $n, m, n-m$ に対して補題 1 を使うことができる.

$$\begin{aligned} \frac{\log_{10} {}_n C_m}{n} &= \frac{m}{n} \log_{10} \frac{n!}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{\log_{10} n! - \log_{10} (n-m)! - \log_{10} m!}{n} \\ &\sim \frac{n \log_{10} n - n \log_{10} e - ((n-m) \log_{10} (n-m) - (n-m) \log_{10} e) - (m \log_{10} m - m \log_{10} e)}{n} \\ &= \frac{n \log_{10} n - (n-m) \log_{10} (n-m) - m \log_{10} m}{n} \\ &= \frac{(n-m) \log_{10} n - (n-m) \log_{10} (n-m) + m \log_{10} n - m \log_{10} m}{n} \\ &= -\left(\frac{n-m}{n} \log_{10} \left(\frac{n-m}{n}\right) + \frac{m}{n} \log_{10} \left(\frac{m}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

定理 4

式 $(a+b)^n$ を展開して例 1 のように並べ, 自然数 n で割ることによって, 大きさをほぼ一定に保ちながら $n \rightarrow \infty$ とすると, 極限図形は, 関数 $f(x) = -(x \log_{10} x + (1-x) \log_{10} (1-x))$ のグラフに限りなく近づく. ただし, x 軸を垂直に, y 軸を水平にとる.

証明 $a^{n-m} b^m$ の係数は ${}_n C_m$ で, 桁数は $\log_{10} {}_n C_m$ となり, これが表 1 の図形の幅となる. 縦の長さは, $n+1$ である. 図形を n で割ると, 幅は $\frac{\log_{10} {}_n C_m}{n}$ となり, n を限りなく大きくしていくと, 縦の長さは 1 となり, 補題 3 を使ってから, $\frac{n-m}{n}$ を x で置き換えると, 定理の結論を得る. ■

注意 5

以上の数学的結果は [1] において既に発表されている. しかしこの雑誌はイタリア語であるため, ここでもう一度証明を掲載した. この証明は原論文の証明を改良して, 簡潔なものにした. 考察. $(a+b)^n$ の展開式は, 数式処理を使っている人ならば, 一度は見たことがあるはずである. そして展開式がこのような極限図形を持つことは, 説明を受ければ数学の専門家なら, すぐに納得できる. しかしこのような初等的な事実がこれまで発見されずにきて, 高校生によって初めて発見されたことは興味深い. このような発見が可能であったのは, 生徒が数式処理で遊ぶ時間があつたことと, 生徒の疑問に対して教師が興味を持ったことによる. 新しい発見を狙うような授業や課外活動は, 時にはかなりだらだらとした雰囲気を作り出す. 教師にとっては, そのような雰囲気を肯定することが難しい場合がある. 研究の経験を持つ教師ならば, 良いアイデアを生み出すためには, 真剣に考える時間と同時に, 非常に気楽に, 自由に空想する時間が必要であることは分かっている.

2 999999999ⁿ の形の数によってできる美しい図形

Mathematica を使った授業で、大きな数で遊ぶということを試みた。すると近藤と池田が自然数 $x = 99999 \dots 99$ と y に対して、 x^y の形の数を考え、計算した。彼らの発想はある意味で非常に単純で、大きな数を作るためには数字の 9 を多く使えば良いと考えたのである。

例 2 数 999999999⁴¹ を計算すると、次の表 2 を得る。生徒たちは 0 と 9 が多いことに気がつき、理由を考え始めたがわからなかった。宮寺にも理由はわからなかった。

生徒と教師はこの数の中に 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 が何回出現したかを調べた。Mathematica にはあ

表 2:

```
999999995900000008199999989340
000010126999992506020004496387
997751806000955482449649656435
112109940768405380327898654918
237992364352401527136567725114
307744669084155195702112640575
533732982691289371930871062804
466267017978873594151584480439
692255330034322748924759847281
762007635921013450803159461967
887890059203503435649904451755
002248193999955036120000749397
99998987300000010659999999180
00000000409999999999
```

るリストの中に特定の数が何回出現するかを調べるコマンド Count[] がある。生徒達はこのコマンドが好きで、何かデータが出来るとこれを使う。ここでは、0 は 72 回、9 は 82 回出現するが、他の数の出現数は比較的少ない。これ以後生徒たちは数字をいろいろ変えながら実験しているうちに、次のような数を発見した。

例 3 ここで扱うのは 99999999999999999999999999999999¹³ である。

この数は美しい対称性を 2 つ持つ。一つは 0,9 を背景として、それ以外の数が図形として、美しい扇形をしていることである。もう一つは、数字同士の対称性である。数 x を数 $9-x$ に対応させる。こうすると、数 9,8,7,6,5 はそれぞれ 0,1,2,3,4 に対応する。この対応により、12,11,... 段目は 1,2,... 段目と対応する。このようにしてこの図形はこの対応に関して対称性を持つ。ただし、ここで 13 段目は無視する。この図形を偶然に発見したのだが、何故このように美しい形になるかについては、すぐに分からなかった。いくつかの研究会でこの図形を見せたのだが、数学や計算機の専門家にもわからなかった。わからないままで、1 年以上が経過した。しかし、著者の一人である峰松が、図形にとらわれずに、ただの数として見直し、それから 0,9 が他の数の間に何個出現するかを丹念に調べるということを提案した。この提案が突破口となった。そのような研究方法によって、次のような構造がわかる。

表 3:

```

99999999999999999999999999999987
00000000000000000000000000000077
99999999999999999999999999999714
00000000000000000000000000000714
99999999999999999999999999998713
000000000000000000000000000001715
99999999999999999999999999998284
000000000000000000000000000001286
99999999999999999999999999999285
00000000000000000000000000000285
9999999999999999999999999999922
00000000000000000000000000000012
9999999999999999999999999999999

```

例 4 表 3 の数字の列の構造を考える。 $a=1000000000000000000000000000000$, $b=(-1)$ として考えて, $(a+b)^{13}$ を計算すれば, 例 3 と同じ数になる。それから例 1 の展開と同じように縦に並べる。

表 4 を使って, 表 3 の構造を考える。近似的には表 3 の 1 段目は表 4 の 1 段目と 2 段目の和になる。同じように, 表 3 の k 段目は表 4 の k 段目と $k+1$ 段目の和になる。

定理 6

数 $(10^k - 1)^n$ を展開し, 幅 k の行列に表示する。このとき, 次のことが成り立つ。

- この行列は次の表に書かれている構造を持つ。ここでは, $L({}_n C_m)$ は数 ${}_n C_m$ の桁数を表す。良く知られているように $L({}_n C_m) \sim \log_{10}({}_n C_m) + 1$ となる。
- 0 と 9 のそれぞれの出現回数の和は,

$$n \times k - (\log_{10}({}_n C_1) + \dots + \log_{10}({}_n C_n))$$
 となる。
- $n \rightarrow \infty$ とすると, 数 1,2,3,4,5,6,7,8 で作られる図形は限りなく関数

$$y = -(x \log_{10} x + (1-x) \log_{10}(1-x))$$
のグラフから作られる相似形に近づく。ここで, x -軸を垂直にとり, y -軸を水平にとる。

証明

- 表 3,4 を注意深く見ると, これらの性質を $(10^k - 1)^n$ の場合に一般化することは容易である。このことにより, 表 5 が得られる。
- したがって, すぐに分かるように, 0 と 9 のそれぞれの出現回数の和は $n \times k - (\log_{10}({}_n C_1) + \dots + \log_{10}({}_n C_n))$ となる。

表 5:

0 と 9 の出現回数	1,2,3,4,5,6,7,8 の出現回数
$k - L(nC_1)$	$L(nC_1)$
$k - L(nC_2)$	$L(nC_2)$
$k - L(nC_3)$	$L(nC_3)$
$k - L(nC_4)$	$L(nC_4)$
$k - L(nC_5)$	$L(nC_5)$
\vdots	\vdots
$k - L(nC_n)$	$L(nC_n)$

例 5

表 6:

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{1} \\
 \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
 \frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\
 \frac{3}{6}, \frac{9}{15}, \frac{13}{20}, \frac{11}{15}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \\
 \frac{4}{7}, \frac{12}{21}, \frac{22}{35}, \frac{24}{35}, \frac{16}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}
 \end{array}$$

この分数のリストを高校の新入生である井上、橋場、中川、松井、表具が見たとき、彼らはこの分数のリストの分子だけを取り出して考え始めた。

例 6

表 7:

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1,1 \\
 2,2,1 \\
 2,4,3,1 \\
 3,6,7,4,1 \\
 3,9,13,11,5,1 \\
 4,12,22,24,16,6,1
 \end{array}$$

見ればすぐに分かるように、数同士の関係はパスカルの三角形に似ており、2つの数の和が2つの数の間の下に現れる。ただし、左端にある数が、上から順番に 1,1,2,2,3,3,... となっている。

この数同士の関係はこの論文ではパスカルの関係とよぶことにする．また，この三角形の数字のリストにおいて n 段目の左から m 番目の数を $U(2, n, m)$ とする．

この三角形の数字のリストは，もう少し一般的に考えることができる．パスカルの関係を保持しながら，左端にある数が，上から順番に 1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,... とすると次のようなリストができる．このリストにおいて， n 段目の左から m 番目の数を $U(3, n, m)$ とする．

例 7

表 8:

1
1,1
1,2,1
2,3,3,1
2,5,6,4,1
2,7,11,10,5,1
3,9,18,21,15,6,1

この三角形の数字のリストを，さらに一般化する． p を任意の自然数とし，パスカルの関係を保持しながら，左端にある数が，上から順番に 1 が p 個，2 が p 個，3 が p 個... としてリストを作る．このリストにおいて， n 段目の左から m 番目の数を $U(p, n, m)$ とする．

ここで，数列 $A_p(n)$ を次のように定義する．

定義 8

任意の自然数 n, p に対して， $A_p(n) = \sum_{k=1}^n U(p, n, k)$.

この数列は組み合わせ論的な意味を持っていることが後でわかり，現在その方面の研究を始めている．

例 8

$$\begin{aligned} A_2(5) &= \sum_{k=1}^5 U(2, 5, k) \\ &= 3 + 6 + 7 + 4 + 1 = 21. \end{aligned}$$

補題 9

$U(p, n, 1) = \text{Floor}\left[\frac{n-1}{p}\right] + 1$. ここで， $\text{Floor}[\]$ は小数点切捨ての関数である．

これは $U(p, n, 1)$ が三角形の数字にリストの各段の左端にある数であることから，すぐに出る．

自然数 p, q に対して， $\text{Mod}[q, p]$ を q を p で割った場合の余りとする．

補題 10

数列 $U(p, n, 1)$ は次のような性質を持つ .

$$\begin{aligned} U(p, n+1, 1) &= U(p, n, 1) + \text{Floor}\left[\frac{(p - \text{Mod}[n, p])}{p}\right] \\ &= \begin{cases} U(p, n, 1) + 1 & (\text{if } \text{Mod}[n, p] = 0) \\ U(p, n, 1) & (\text{if } 0 < \text{Mod}[n, p]) \end{cases} \end{aligned}$$

証明は補題 9 から殆ど明らかである .

補題 11

$$A_p(n+1) = \begin{cases} 2A_p(n) + 1 & (\text{if } \text{Mod}[n, p] = 0) \\ 2A_p(n) & (\text{if } 0 < \text{Mod}[n, p]) \end{cases}$$

証明 $U(p, n, n)$ がパスカルの性質をもつことと , 数のリストの性質から $U(p, n+1, n+1) = U(p, n, n) = 1$ となることを使うと , 次の式が成立する .

$$\begin{aligned} A_p(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} U(p, n+1, k) \\ &= U(p, n+1, 1) + \sum_{k=2}^n U(p, n+1, k) + U(p, n+1, n+1) \\ &= U(p, n+1, 1) + \sum_{k=2}^n (U(p, n, k-1) + U(p, n, k)) + U(p, n, n) \\ &= U(p, n+1, 1) + U(p, n+1, 1) + \sum_{k=2}^n U(p, n, k) \\ &= \begin{cases} 2 \sum_{k=1}^n U(p, n, k) + 1 & (\text{if } \text{Mod}[n, p] = 0) \\ 2 \sum_{k=1}^n U(p, n, k) & (\text{if } 0 < \text{Mod}[n, p]) \end{cases} \end{aligned}$$

これらの式と , 数列 $A_p(n)$ の定義 8 により証明が終わる . ■

定理 12

$$A_p(n) = \frac{2^{n+p-1} - 2^{\text{Mod}[n-1, p]}}{2^p - 1}.$$

証明 数学的帰納法を使う . 定理の結論が自然数 n に対して正しいと仮定し , $n+1$ の場合を証明することにする .

$0 \leq \text{Mod}[n-1, p] < p-1$ のときは , $0 < \text{Mod}[n-1, p] + 1 = \text{Mod}[n, p]$ であり , 補題 11 により $A_p(n+1) = 2A_p(n) = \frac{2^{n+p} - 2^{\text{Mod}[n-1, p]+1}}{2^p - 1} = \frac{2^{n+p} - 2^{\text{Mod}[n, p]}}{2^p - 1}$ となる .

$\text{Mod}[n-1, p] = p-1$ とすると , $\text{Mod}[n-1, p] + 1 = p$ かつ $\text{Mod}[n, p] = 0$ となる . したがって , 数列 $A_p(n+1) = 2A_p(n) + 1 = \frac{2^{n+p} - 2^{\text{Mod}[n-1, p]+1} + 2^p - 1}{2^p - 1} = \frac{2^{n+p} - 1}{2^p - 1} = \frac{2^{n+p} - 2^{\text{Mod}[n, p]}}{2^p - 1}$. ■

以上の証明は、高校の新入生達によって完成した。その後教師がいろんな記号を使って、読みやすくした。彼らはまだ数学の証明については慣れていなかったが、自分達で発見した事実を証明するときには、自分の持っている以上の力を発揮できるように、文字 n, m, p などを使って一般的に証明することができた。彼らは教科書や問題集を使っているときは、いろんな数学的事実を文字を使って一般的に証明することに困難を感じる人が多いのである。

ここには数学の本質があるように思える。数学教育では、生徒が証明を嫌うということが話題にある。しかし、この研究を見ていると、通常の授業の中では数学の証明を嫌うような生徒であっても、自分が発見したことを証明することには、情熱を傾けることが可能であった。そもそも証明の必要性とは、新しく発見したことを自分と他の人たちに対して確立するためのものである。自分達が初めて発見したことを、証明したいと考えることは、とても自然なことであろう。これは数学教育で証明を教えるときに、活用できることではないだろうか。たとえ発見でなくても、再発見でも本人には大切な経験であり、見つけたことを自力で証明することは楽しい経験になり得るだろう。

例 9 上で定義した $A_p(n)$ は、 p の値によっていろんな数列になり、その中のいくつかは数列データベースの "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" に登録されているが、そうでないものもある。([8] を参照してほしい。) したがって、生徒達が見つけた数列の一般形は知られていないことになる。

1. $p = 2$ とすると、 $A_p(n)$ は以下ようになる。これは、A000975 として登録されている。
 $\{1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341, 682, 1365, 2730, 5461, 10922, 21845, 43690, 87381, 174762, 349525, 699050, \dots\}$.
2. $p = 3$ とすると、 $A_p(n)$ は以下ようになる。これは、A033138 として登録されている。
 $\{1, 2, 4, 9, 18, 36, 73, 146, 292, 585, 1170, 2340, 4681, 9362, 18724, 37449, 74898, 149796, 299593, 599186, \dots\}$.
3. $p = 4$ とすると、 $A_p(n)$ は以下ようになる。これは、A083593 として登録されている。
 $\{1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136, 273, 546, 1092, 2184, 4369, 8738, 17476, 34952, 69905, 139810, 279620, 559240, \dots\}$.
4. $p = 5$ とすると、 $A_p(n)$ は以下ようになる。これは、A119610 として著者達によって登録されている。
 $\{1, 2, 4, 8, 16, 33, 66, 132, 264, 528, 1057, 2114, 4228, 8456, 16912, 33825, 67650, 135300, 270600, 541200, \dots\}$.
5. $p = 6$ とすると、 $A_p(n)$ は以下ようになる。これは、A101333 として登録されている。
 $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 65, 130, 260, 520, 1040, 2080, 4161, 8322, 16644, 33288, 66576, 133152, 266305, 532610, \dots\}$.
6. $p = 7$ とすると、 $A_p(n)$ は以下ようになる。これは、A117302 として登録されている。
 $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 129, 258, 516, 1032, 2064, 4128, 8256, 16513, 33026, 66052, 132104, 264208, 528416, \dots\}$.

これ以上 p が大きくなると、現在のところデータベースには登録されていない。著者達が発見した数列は一般の p に対して定義されている。

4 パスカルの三角形から作られる数列 2

パスカルの三角形に現れる数字を斜めに足すことによってフィボナッチ数列が作られることは良く知られている。生徒達はそれを参考にして、前の節で使った数のリストにおいて、数字を斜めに足すことを行なった。このような操作によって、次に定義される数列が作られた。

定義 13

数列 $B_p(n)$ を次のように定義する。

$$B_p(n) = \sum_{k=0}^{\text{Floor}[(n-1)/2]} U(p, n-k, k+1).$$

例 10 $\text{Floor}[(5-1)/2] = 2$ であるから、

$$A_2(5) = \sum_{k=0}^2 U(2, 5-k, k+1) = 3 + 4 + 1 = 8 \text{ となる。}$$

表 9:

1
1, 1
2, 2, 1
2, 4, 3, 1
3, 6, 7, 4, 1
3, 9, 13, 11, 5, 1
4, 12, 22, 24, 16, 6, 1

次の定理 14 が成り立つことは、数列 $B_2(n)$ の定義から明らかである。

定理 14

$$B_2(n) = B_2(n-1) + B_2(n-2) + \text{Mod}[n, 2].$$

証明は数列 $B_2(n)$ の定義と、三角形の数のリストがパスカルの関係を持つことによる。

定理 14 を一般の数列 $B_p(n)$ に拡張することは容易である。

ここでは三角形の数字のリストにおいて、その中の数を足すということがいろいろな数列を生んだ。しかし生徒達の中で最初にそれを行ったのは井上で、 $U(2, 2, 2) + U(2, 3, 2) + U(2, 4, 2) = 1 + 2 + 4 = 7 = U(2, 5, 3)$ という事実を発見した。このことから、いろんな和を求めるといことが生徒達の間で流行し、結果として面白い事実が見つかった。これらの数列は、フィボナッチ数列に似た数列であるが、それだけではない。現在松井を中心として研究が進んでいるが、この数列はフィボナッチ数列が持っている性質を共有している場合と、全く違う場合があり、これからの

次は少し違ったタイプの数列である .

$$\begin{aligned} & \sqrt{128} \\ & = 24 \sqrt{222444666889111333555778000222444666889111333555778} \end{aligned}$$

この数列を"The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences"で探したが, 収録されていなかった. 著者達はこの数列を登録した. 分類番号 A113694 となっている. この数列を作り出すような分数も探してみた. 今回は類推することができなかったので, 数式処理システムを使って探し, 次の分数を見つけた. Mathematica にはパターンを探すコマンドがあり, それを活用した .

$$\frac{10}{44955} = 0.000222444666889111333555778000222444666889111\dots$$

次の数列は出てくる数字の個数が 2,1,2,1,... と変化する .

$$\begin{aligned} & \sqrt{101101101101101101101101101101101101} \\ & = 3 \sqrt{11233455677900122344566789} \end{aligned}$$

この数列を"The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences"で探したが, 収録されていなかった. 著者達はこの数列を登録した. 分類番号 A113818 となっている. この数列を作り出すような分数も探してみた. 数式処理システムを使って $n=1$ から 600000 までの数を探したが, $\frac{1}{n}$ の形の数の中には, この数列を作る分数を見つけないことができなかった. ここで, この数列を作る分数が存在するかどうかは未解決である .

$$\begin{aligned} & \sqrt{11} \\ & = 11 \sqrt{91827364554637281910009182736455463728191} \end{aligned}$$

この数列を"The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences"で探したが, 収録されていなかった. 著者達はこの数列を登録した. 分類番号 A113657 となっている. この数列を作り出すような分数も探してみた. 今回は類推することができなかったので, 数式処理システムを使って探し, 次の分数を見つけた .

$$\frac{1}{1089} = 0.0009182736455463728191000918273645546372819\dots$$

次はもう少し複雑な変化をする数列を見つけた .

$$\begin{aligned} & \sqrt{109901109901109901109901109901109901109901109901109901109901109901} \\ & = 3 \sqrt{12211234433456655678877901100123322345544567766789989} \end{aligned}$$

この数列を"The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences"で探したが, 収録されていなかった. 著者達はこの数列を登録した. 分類番号 A113818 となっている. この数列を作り出すような分数も探してみた. 数式処理システムを使って $n=1$ から 600000 までの数を探したが, $\frac{1}{n}$ の形

の数の中には、この数列を作る分数を見つけることができなかった。ここで、この数列を作る分数が存在するかどうかは未解決である。これらの平方根から作られる数列が、常に分数によっても作られるかどうかは未解決問題である。また、これらの循環する数と、分数との関係もまだ研究中である。これらの問題は、数学的に重要な問題ではないかもしれないが、数式処理システムを使うとき、高校生や大学の初年級の生徒であっても未知の領域に踏み込むことが可能になるという事実は重要である。

6 その他の研究活動について

ここで紹介したもの以外の研究について述べる。

著者達が興味を持って研究しているテーマの1つに、ヨセフス問題の拡張がある。これについては、[3]がある。なお、ヨセフス問題については未発表の研究成果がかなりあり、著者達はさらに1つの論文を投稿済みで、なおかつもう1つの論文を準備中である。

ロシアンルーレットの数学的理論については、最初に [5] で発表し、その後 [7] で発展させた。

7 生徒による研究の発表の場所について

高校生や大学の初年級の学生が新しい数学的事実を発見したとき、発表の場を持つことは簡単ではない。数学的に完成した場合は、数学雑誌でも掲載してくれるところがある。例えば *Mathematical monthly*, *Mathematical Gazette*, *Mathematical magazine* などがある。

Mathematica のプログラムを含んだ、面白い計算結果が出た場合は、*Mathematica in education and research* なども掲載してくれるだろう。著者達もこの雑誌から論文を出版する予定である。

他には、Archimedes-lab と Mathpuzzle.com などの Online 数学雑誌がある。著者達の記事も、Archimedes-lab では3件、Mathpuzzle.com では2件掲載された。これらの online 雑誌は、世界的に良く知られており、広い読者を持っている。Archimedes-lab は、*Scientific American* 誌の選んだ世界の優れた数学サイトベスト5に入ったことがある。同時に選ばれたサイトは、アメリカのロスアラモス研究所などである。選ばれた他のサイトが著名な学者の執筆にのみ依存しているのに対して、Archimedes-lab は投稿原稿の評価をする委員会を持っており、そこで評価されたならば、誰の原稿であっても掲載される。

また、Mathpuzzle.com は世界的に良く知られた数理パズルサイトで、MSN によって表彰を受けている。ここでは、世界的な数理パズル作家の Ed Pegg が責任を持っているが、彼が投稿原稿を審査することになっている。

以上にあげたような発表の場は、日本にはほとんどない。

8 数式処理システムの導入について

数式処理システムを教育に導入する場合、一つの壁は費用の問題である。商品として売られているシステムでは、Mathematica, Maple などは、インターフェース、グラフィックス、プログラム環境が優れているが、学校として導入する場合にはかなり高額となる。オープンソースのシステムの中にも、優れた計算エンジンを持ったものがあるが、インターフェースなどの点では、使い難いものが多い。しかし導入費用はかなり低くなる。この価格と使いやすさの問題は現在のところ解決が難しい。数学の研究には使いやすいインターフェースやグラフィックス、

豊富な関数を持つプログラム環境が重要である。しかし高価なシステムを導入できる学校は現在のところ多くはない。

オープンソースの数式処理システムの、環境を改善して、大規模に教育の中に導入することができれば、数学教育の可能性が広がるはずである。

参 考 文 献

- [1] R. Miyadera and Y. Kotera: Una Bella Curva Che Troviamo in Connessione con lo Sviluppo di, *Archimede*, **2**, 2005
- [2] R. Miyadera, S.Hashiba and D.Minematsu: $999\dots 99^n$, *Visual Mathematics Art and Science Electric Journal of ISIS-Symmetry*, **8**(2), 2006
- [3] R. Miyadera, S.Hashiba and D.Minematsu: How high school students can discover original ideas of mathematics using Mathematica, *Mathematica in education and research*, to appear
- [4] R. Miyadera, S.Hashiba and D.Minematsu: Mathematical Theory of Magic Fruits, - Interesting patterns of fractions- *Archimedes' Laboratory*
- [5] 宮寺良平 坂口宗敏 増田正幸: ロシアンルーレットの数学的理論, *Archimede*, **2**, 2005
- [6] R. Miyadera, K. Kawamoto and Y. Moriyuki: Theory of Russian roulette, *Proceedings of the Forth International Mathematica Symposium*, 2002
- [7] R. Miyadera, K. Miyabe, D. Kitajima, N. Fujii and K. Fujii: How High School Students Could Present Original Math Research Using Mathematica, *Proceedings of the Fifth International Mathematica Symposium*, 2003
- [8] R. Miyadera, etc: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences