数式処理 *J.JSSAC (2005)*
Vol. 11, No. 3,4, pp. 89 - 97

Noda2005 論文

ロボットの運動学における数式処理の利用

白石 啓一*

詫間電波工業高等専門学校

概　要

A formulation of 3-dimensional robot manipulators, an outline of solving the forward kinematics problem(FKP) and the inverse kinematics problem(IKP) are summarized. The computation of FKP for the Stanford Manipulator with a computer algebra system Risa/Asir is shown.

1　はじめに

従来より，ロボット工学では解析や式変形などに数式処理が利用されて来た [1][2][3]．実際，我々もロボットの逆運動学問題に対して，数式処理システム Risa/Asir 上で Wu の方法を用いた解法を適用した [4][5]．本稿では，過去ロボット工学でなされて来た運動学に関する定式化と問題をまとめ，今後のロボット工学における数式処理の利用方法を探る．

2　ロボットの定式化

ここでは，ロボットマニピュレータを扱う．マニピュレータの運動学とは，マニピュレータの各リンクや作業対象物の運動，即ちそれらの位置や速度の関係を幾何学的観点から調べることである [6, p.11]．まず，座標系の回転，並進，それらの組合せを考える．

基準座標系 Σ_A，物体座標系 Σ_B を図 1 のように定める．O_*, X_*, Y_*, Z_* は，それぞれ Σ_* の原点，X, Y, Z 軸である．X, Y, Z 軸は直交しており，右手系をなすように取る．${}^A\vec{r}_B$ は，Σ_A から見た O_B の位置ベクトルである．${}^A\vec{p}_B$ のように，ベクトルや行列の左上添字は，その添字の座標系でベクトルや行列を表していることを示す．

Σ_A から見た X_B, Y_B, Z_B 軸の単位ベクトルを，それぞれ ${}^A\vec{x}_B, {}^A\vec{y}_B, {}^A\vec{z}_B$ で表す．行列

$$
{}^AR_B = \begin{pmatrix} {}^A\vec{x}_B & {}^A\vec{y}_B & {}^A\vec{z}_B \end{pmatrix}
$$

は，回転行列と呼ばれ，Σ_A, Σ_B の回転に関する相対的位置関係を示す．即ち，回転行列は，図 2 のように O_A, O_B を一致させたときの Σ_A, Σ_B 間の位置関係である．回転行列は 9 変数であるが，

*siraisi@dc.takuma-ct.ac.jp

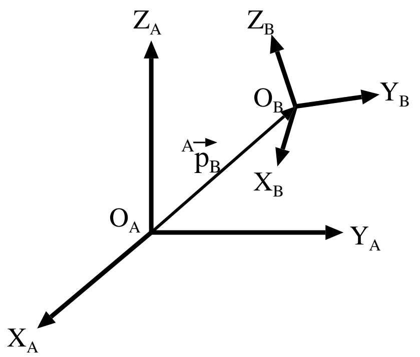

図 1: 基準座標系と物体座標系

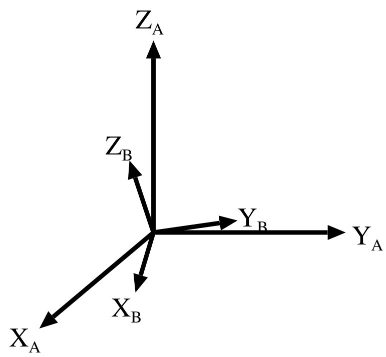

図 2: 回転

実際にはオイラー角やロール・ピッチ・ヨー角と呼ばれる表現により 3 変数で表すことができる [6, p.15]．ここでは，オイラー角とその回転行列への変換方法を示す．

Z-Y-Z オイラー角 (ϕ, θ, ψ) は，

1. 座標系 Σ_A の Z_A 軸まわりに ϕ 回転させたものを Σ'_A とする
2. Σ'_A の Y'_A 軸まわりに θ 回転させたものを Σ''_A とする
3. Σ''_A の Z''_A 軸まわりに ψ 回転させたものを Σ_B とする

という手順の回転を表現しており，回転行列

$$\begin{aligned}
{}^{A}R_{B} &= {}^{A}R_{A'}\,{}^{A'}R_{A''}\,{}^{A''}R_{B} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

に対応する．ただし，$C_* = \cos *, S_* = \sin *$ である．

図 1 の Σ_B は図 2 の Σ_B を ${}^{A}\vec{p}_B$ だけ並進させたものにあたる．

Σ_A から見た Σ_B は，回転と並進を組み合わせた同次変換行列

$$ {}^{A}T_{B} = \begin{pmatrix} {}^{A}R_{B} & {}^{A}\vec{p}_{B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

で表される．即ち，${}^{A}T_B$ は，Σ_A を ${}^{A}\vec{p}_B$ だけ並進させ，${}^{A}R_B$ だけ回転させることを示す．

図 3 に示す n 関節のマニピュレータを考える．$q_1, q_2, \ldots, q_n$ は各関節の変位を表す変数である．マニピュレータの関節には回転関節 (q_1, q_n) と直動関節 (q_2) があり，それぞれの変数は回転

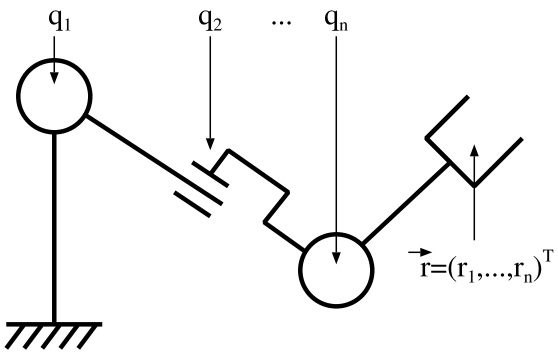

図 3: n 関節マニピュレータ

変位と並進変位を表す．これら関節の変位をまとめて，関節変数ベクトル

$$\vec{q} = (\ q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n\ )^T$$

で表す．手先の位置と姿勢を表すベクトルを

$$\vec{r} = (\ r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_m\ )^T$$

とする．3 次元空間内の場合，位置，姿勢ともに 3 次元で表せるので，$m = 6$ となる．

$\vec{r}, \vec{q}$ の関係はマニピュレータの機構によって決まる．これを

$$\vec{r} = f_r(\vec{q}) \tag{1}$$

で表す．$\vec{q}$ が与えられたとき，$\vec{r}$ を計算する問題を順運動学問題と呼ぶ．この計算は容易である．マニピュレータに何らかの仕事させたい場合，$\vec{r}$ やその軌道を与え，$\vec{q}$ を計算する．この問題を逆運動学問題と呼ぶ．形式的には

$$\vec{q} = f_r^{-1}(\vec{r}) \tag{2}$$

と書けるが，解が存在するとは限らず，存在しても一意とは限らないので，順運動学問題に比べ難しい．

次に，f_r の与え方を示す．但し，$\vec{r}$ の代わりに，$\vec{r}$ から計算される同次変換行列を使う．

図 4 に示すように，マニピュレータの第 $i-1$ 関節と第 i 関節をつなぐ部分を第 $i-1$ リンク，第 i 関節と第 $i+1$ 関節をつなぐ部分を第 i リンクとする．第 i リンクの座標系 Σ_i を以下の条件で設定する[1)]．

- 第 i 関節が回転関節ならば回転軸を，直動関節ならば直動方向に平行な線を Z_i にし，方向はできるだけ手先に向かう向きとする．

[1)] 詳細を省くが，DH パラメータをできるだけ 0 になるように座標系を取れば，後の計算を簡単にできる [6, pp.30–31].

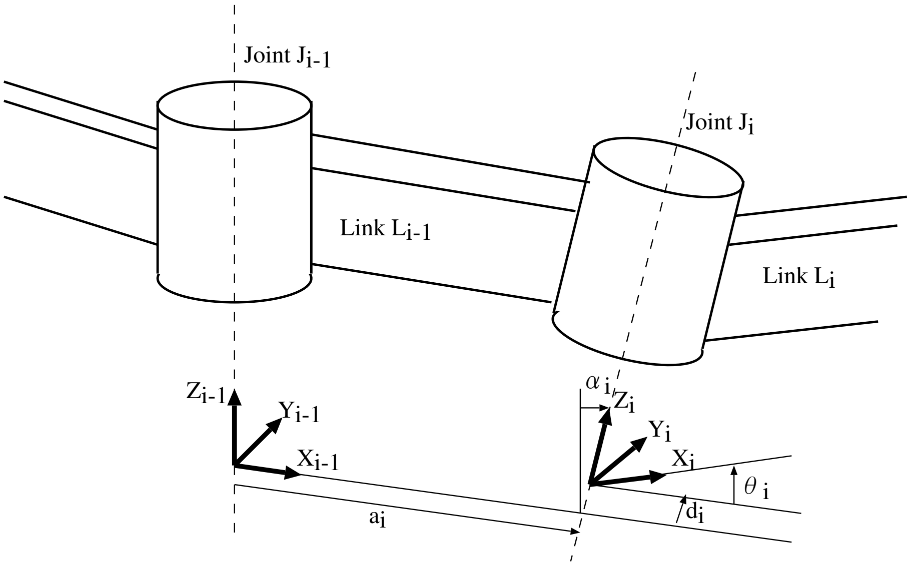

図 4: 前後のリンクと DH パラメータの関係

- Z_i, Z_{i+1} の共通垂線の第 i 関節から第 $i+1$ 関節へ向かう向きを X_i とする．
- Y_i は，Z_i, X_i と右手系をなすようにとる．

従って，Σ_i は第 $i-1$ リンクの座標系 Σ_{i-1} に以下の変換を施すことで得られる．

1. X_{i-1} に沿って a_i だけ並進
2. X_{i-1} まわりに α_i だけ回転
3. 回転後の $Z_{i-1}(Z_i)$ に沿って d_i だけ並進
4. 回転後の $Z_{i-1}(Z_i)$ まわりに θ_i だけ回転

ここで，$a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$ は図 4 に示したパラメータで，DH パラメータと呼ばれる．従って，Σ_{i-1} から見た Σ_i の位置と姿勢を表す同次変換行列は

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}T_i \quad = \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & 0 \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & a_i \\ C_{\alpha_i}S_{\theta_i} & C_{\alpha_i}C_{\theta_i} & -S_{\alpha_i} & -d_iS_{\alpha_i} \\ S_{\alpha_i}S_{\theta_i} & S_{\alpha_i}C_{\theta_i} & C_{\alpha_i} & d_iC_{\alpha_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

で表される．DH パラメータのうち，第 i 関節が回転関節なら θ_i が，直動関節なら d_i が関節変数 q_i となり，残りのパラメータは定数となる．

以上より，基準座標系 Σ_R から見た第 0 リンクの座標系 Σ_0 の位置と姿勢を表す同次変換行列を ${}^RT_0$，第 n リンクの座標系 Σ_n から見た手先の座標系 Σ_E の位置姿勢を表す同次変換行列を ${}^nT_E$ とすると，Σ_R から見た Σ_E の位置と姿勢を表す同次変換行列は,

$$
{}^RT_E = {}^RT_0{}^0T_1{}^1T_2\cdots{}^{n-1}T_n{}^nT_E
$$

で表される．${}^RT_E$ は姿勢が回転行列で表されているが，$\vec{q}$ の関数であり，式 (1) の f_r にあたる．

次に，Σ_R から見た，手先の位置を表すベクトル ${}^R\vec{p}$，Z-Y-Z オイラー角などから計算した手先の姿勢を表す回転行列 ${}^RR$ を与えたとしよう．

$$
{}^RT_E(\vec{q}) = \begin{pmatrix} {}^RR & {}^R\vec{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}
$$

を $\vec{q}$ について解く問題が逆運動学問題である．

3 スタンフォードマニピュレータ

表 1: スタンフォードマニピュレータの DH パラメータ

i	a_i	α_i	d_i	θ_i	i	a_i	α_i	d_i	θ_i
0	0	0	d_0	0	4	0	0	0	(θ_4)
1	0	0	0	(θ_1)	5	0	$-\pi/2$	0	(θ_5)
2	0	$-\pi/2$	d_2	(θ_2)	6	0	$\pi/2$	0	(θ_6)
3	0	$\pi/2$	(d_3)	0	H	0	0	d_H	0

( ) 内は関節変数

スタンフォードマニピュレータと呼ばれるロボットマニピュレータを考える．そのリンク構造は図 5 に，リンク座標系は図 6 に示している．各関節は図 7 に示すように動く．図 6 より表 1 に示す DH パラメータが得られるので，基準座標系 Σ_R から見た手先の位置と姿勢を示す同次変換行列は,

$$
\begin{aligned}
{}^RT_H &= {}^RT_0{}^0T_1{}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6{}^6T_H \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 & 0 \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -S_{\theta_2} & -C_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

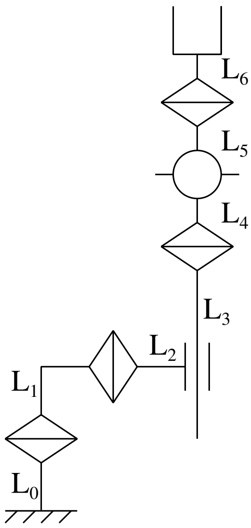

図 5: スタンフォードマニピュレータのリンク構造

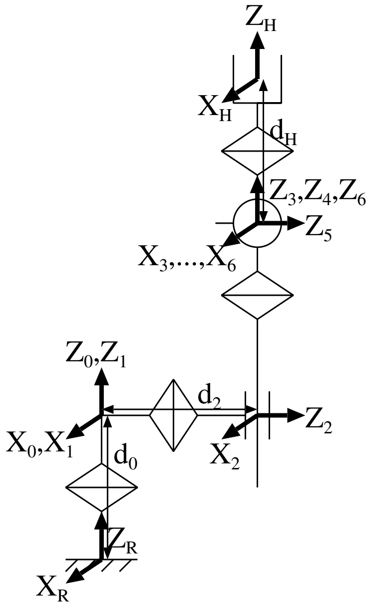

図 6: スタンフォードマニピュレータのリンク座標系

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\theta_4} & -S_{\theta_4} & 0 & 0 \\ S_{\theta_4} & C_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\theta_5} & -S_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_{\theta_5} & -C_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} C_{\theta_6} & -S_{\theta_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_{\theta_6} & C_{\theta_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される．

以下，計算は数式処理システム Risa/Asir で行った．${}^{R}T_E$ の関節変数に各関節の変位を代入すると，そのときの手先の位置と姿勢が分かる．例えば，$\theta_1 = \theta_2 = d_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$ を代入すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_0 + d_H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られ，手先の位置が $(0, d_2, d_0 + d_H)$，姿勢は基準座標と同じことが分かる．また，$\theta_1 = \theta_2 =$

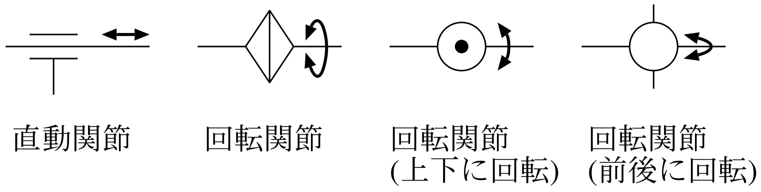

図 7: 関節の記号

$\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \pi/6, d_3 = 2$ の場合,

$$\begin{pmatrix} -0.292 & -0.765 & 0.575 & -0.500d_2 + 0.575d_H + 0.866 \\ 0.765 & 0.175 & 0.621 & 0.866d_2 + 0.621d_H + 0.500 \\ -0.575 & 0.621 & 0.533 & d_0 + 0.533d_H + 1.73 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．但し，三角関数を数値計算で評価した後，有効数字 3 桁で示している．これより，手先の位置が，$(-0.500d_2 + 0.575d_H + 0.866, 0.866d_2 + 0.621d_H + 0.500, d_0 + 0.533d_H + 1.73)$，姿勢は回転行列

$$\begin{pmatrix} -0.292 & -0.765 & 0.575 \\ 0.765 & 0.175 & 0.621 \\ -0.575 & 0.621 & 0.533 \end{pmatrix}$$

で表されることが分かる．

なお，ここまでの計算に用いた DH パラメータから同次変換行列を求める関数や行列の各要素を評価する関数などは，数式処理システム Risa/Asir 上で作成した．詳しくは付録 A で述べる．

逆運動学問題の解，式 (2) を得るには，式 (3) を解く必要があり，第 1 ~ 3 行から得られる 12 本の連立方程式を解けば良い．数式処理システムを用いて解く際には，全ての回転関節の変数に対する三角関数の関係式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を加えることで，連立代数方程式として扱うことができ，グレブナ基底計算 [1][2][3] や Wu の方法 [4][5] を用いて解くことができる．

4 おわりに

ロボットマニピュレータの定式化について，基準座標系から見た手先の位置と姿勢を関節変数を用いて同次変換行列により表す方法を示した．この行列の関節変数に各関節の変位を代入することで，順運動学問題を解くことができ，手先の位置と姿勢が分かる．逆に与えられた手先の位置と姿勢から各関節変数の値を求める問題を逆運動学問題と呼び，連立代数方程式の求解に帰着する．これら運動学問題に便利な関数を数式処理システム Risa/Asir 上に作成した．

運動学問題について述べたが，ロボット工学には数式処理で扱うと良い問題が他に多数あるので，それらについて調べることが今後の課題である．また，数値計算と融合させた方法もあわせて検討していきたい．

参考文献

[1] 川崎 晴久, 清水 年美: ロボット数式処理, 昭晃堂, 2000.

[2] Kovács, P.: Robotics, *Computer Algebra Handbook*, (Grabmeier, J., Kaltofen, E., Weispfenning, V., eds.), Springer-Verlag, 2003, 229–234.

[3] 白柳 潔: グレブナ基底入門, システム／制御／情報, **39**(5), 1995, 225–232.

[4] Shiraishi, K.-i., Kai, H., Noda, M. T.: Symbolic-numeric computation of Wu's method using stabilizing algorithm, *Proc. ATCM 2001* (Yang, W.-C., Chu, S.-C., Karian, Z., Fitz-Gerald, G., eds.), ATCM Inc., USA, 2001, 444–451.

[5] 白石 啓一, 甲斐 博, 野田 松太郎: 安定化した Wu's method のロボット制御への応用, 数理解析研究所講究録 1295 Computer Algebra — Algorithms, Implementations and Applications, 京都大学数理解析研究所, 2002, 203–208.

[6] 吉川 恒夫: ロボット制御基礎論, コロナ社, 1988.

A ロボットマニピュレータ用関数群

数式処理システム Risa/Asir 上に作成したロボットマニピュレータ用関数群について述べる.

rotx(T) 角度 T を引数にとり, X 軸周りに T だけ回転する回転行列を返す.

roty(T) 角度 T を引数にとり, Y 軸周りに T だけ回転する回転行列を返す.

rotz(T) 角度 T を引数にとり, Z 軸周りに T だけ回転する回転行列を返す.

makeT(A,Al,D,T) DH パラメータ A, Al, D, T を引数にとり, 隣り合うリンク座標系の関係を示す同次変換行列を返す（A, Al, D, T は, それぞれ DH パラメータ a, α, d, θ).

meval(M) 行列 M を引数にとり, M の各要素を eval() 関数で評価した行列を返す.

mcs2p(M,L) 同次変換行列 M と回転関節の関節変数のリスト L を引数にとり, cos, sin を不定元に置き換えた行列を返す. 例えば, L=[t1,t2] の場合, cos(t1),sin(t1),cos(t2),sin(t2) をそれぞれ c1,s1,c2,s2 へ置き換える.

euler2r(Ph,Th,Ps) 角度 Ph,Th, Ps を引数にとり, Z-Y-Z オイラー角 (Ph,Th,Ps) を表す回転行列を返す.

par(X,Y,Z) X,Y,Z を引数にとり, 並進ベクトル (X,Y,Z) を返す.

homoTrans(R,P) 回転行列 R, 並進ベクトル P を引数にとり, 同次変換行列を返す.

makeSys(M,V) 行列 M と mcs2p で変換した不定元のリスト V を引数にとり, 関係 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ と M の第 1~3 行の要素をリストにして返す. 即ち, 逆運動学問題の連立代数方程式を表す多項式のリストを返す.

これらの関数を使うと, 第 $i-1$ リンクの座標系から見た第 i リンク座標系の同次変換行列 Ti は

```
Ti=makeT(A,Al,D,T);
```

で計算できる. 但し, A,Al,D,T には適切な値, 不定元を用いる. 基準座標系から見た第 0 リンクの座標系の同次変換行列 T0, 第 n リンクの座標系から見た手先座標系の同次変換行列 TE も同様に計算されるので, 基準座標系から見た手先座標系の同次変換行列 T は,

```
T=T0*T1*···*Tn*TE;
```

で計算できる．`T` は関節変数の関数になっているので，`makeT()` を使う際に使用した不定元に対し値を代入することで順運動学問題が解ける．必要ならば，`meval()` により数値解が得られる．

逆運動学問題を解く場合，以下の手順で計算できる．`t1`,`t2`,`t3` が回転関節の関節変数ならば，

```
A=mcs2p(T,[t1,t2,t3]);
```

で三角関数を新たな不定元 c1,s1,c2,s2, c3,s3 で置き換えた行列 `A` が得られる．目標とする手先の位置を (x,y,z)，姿勢を Z-Y-Z オイラー角 (a,b,c) で与えられたなら，その位置と姿勢を表す同次変換行列を

```
B=homoTrans(euler2r(a,b,c),par(x,y,z));
```

で得られる．解くべき連立代数方程式 (を表す多項式のリスト) は,

```
C=makeSys(A-B,[c1,s1,c2,s2,c3,s3]);
```

で得られるので，`C` をグレブナ基底計算や Wu の方法で簡約すれば良い．但し，関節変数が多い場合や手先の位置と姿勢を変数で与えた場合，非常に計算時間が長くなるので注意すること．