数式処理 *J.JSSAC (2003)*
Vol. 10, No. 1, pp. 63 - 70

特集 "Quantifier Elimination"

機械系システム設計への応用

沢田 浩之*

産業技術総合研究所

Abstract

本稿では、まず機械システム設計のプロセスについて概説し、その後どのような設計支援が効果的であるのかを述べる。そして、その具体的な方法として QE の応用例を示す。

1 機械システム設計の基本的プロセス

文献 [5] によれば、設計は、人が頭の中で考えたものを、実際の物の形にするためのすべての情報を作り出すこととして定義される。設計者は、機械システムに対する要求仕様を満足するように、まずはシステム全体を考える。その典型的なプロセスは以下の通りである。

1. 機能の設定
   与えられた要求仕様を満足するために必要な機能を設定する。ここでいう機能とは、機械システムが何をするのか（*what the artefact is supposed to do*）を指す[1)]。始めにシステム全体として達成すべき機能が設定され、それをサブ機能へブレークダウンしていくことが多い。

2. 機構の考案
   設定された機能（およびサブ機能）を実現するための具体的な機構（how to do）を考案する。この作業は、頭に浮かぶアイデアをポンチ絵として表現しながら進められるのが通常である。前段階の「機能の設定」と密接に関わっており、適切な機構が見つからない場合には機能の見直しが行われる。

3. 構造の決定
   考案された機構が正しく動作するように、部品の形状・寸法・材質などを決定する。この段階で具体的な数値を表すための設計変数が導入され、それらの間の関係が制約条

*h.sawada@aist.go.jp

1) 設計工学において、「機能」の概念は明確に定義されているわけではない。ここでの定義は文献 [2] に拠った。

件として定義される。制約条件を満足する適切な設計変数値が見つからない場合には、機構もしくは機能の見直しが行われる。

この他にも、加工法の選定や機械システムの保守・点検などメンテナンス性の検討などが行われるが、それは本稿で対象とする範囲を逸脱するためここでは省略する。

なお、上述の設計プロセスは要求仕様に基づいて新しいものを作り出す新規設計を前提としたものであることを断っておく。すでに手本となる設計があってそれに手を加えるといった類の「手直し設計」の場合には、このようなプロセスを経ずに設計図面の作成に至ることも多い。

2 機械システム設計の支援

前節で述べた機械システム設計の基本的プロセスにおいて、「3. 構造の決定」、すなわち設計変数値を決定する段階の作業負担は大きい。この段階では多くの設計変数が導入されるとともに、それらの間の関係式が定義される。設計者には、すべての制約条件を満足し、なおかつ機械システムの性能が最適となるように設計変数値を決定することが求められる。

設計変数値は、設計者個人の経験と知識に基づいた試行錯誤によって決定されることが少なくない。すなわち、ある設計変数に対して経験的に適当と思われる数値を割り当て、それを逐次代入していくことによって値が未定の設計変数を１つずつ減らし、最終的にすべての設計変数に何らかの数値を割り当てるという方法である。このような方法は、設計の品質および作業効率の点で以下のような問題がある。

- 制約条件を満たす解が見つかったとしても、それが最適解であることは保証されない。
- いくつかの数値をサンプル点として試すに過ぎないので、存在しているはずの解を見落とすことがある。これは機構や機能の不必要な再検討につながり、結果として作業効率の低下を招く。
- 有限個数のサンプル点のみで機構や機能設定の適否を判断しなくてはならないため、適切な設計変数値が存在しないと判断するためには同じ作業を何度も繰り返さなくてはならない。これもまた作業効率の低下につながる。

このような問題を回避し設計品質および作業効率の向上を図るためには、設計者が設計変数の相互依存関係を正確に把握することが必要である。

設計変数の相互依存関係は、設計変数を軸とした空間内での領域もしくは軌跡として表現される。これを本稿では**設計解空間**と呼ぶことにする。設計解空間の２次元もしくは３次元空間への射影を求め、それをグラフとして提示することにより、設計者が設計変数の相互依存関係を直観的に理解できるようになる。

このような設計支援技術は、QE を含めた数式処理技術を応用することによって提供が可能である。特に、射影先空間の軸の１つとして機械システムの性能を示す設計変数を選ぶことにより、機械システムの性能とその他の設計パラメータとの関係を把握できる。これは、設計品質の向上に大きく寄与することになる。

ここで、いわゆる「設計の最適化」が必ずしも「機械システムの最大性能を得られるように設計変数の値を定めること」とは限らないということを述べておかなくてはならない。例として、設計変数の値と機械システムの性能の関係が図 1 で与えられるような場合を考える。この図の場合、設計変数の値を A としたときに機械システムの最大性能が得られる。しかし

swd-perf.eps

図 1: 設計の最適化

ながら、加工精度による性能のばらつきやシステムの老朽化にともなう性能劣化の度合いなどを考慮し、敢えて最大性能を犠牲にして設計変数の値を B とすることも多い。すなわち、機械システムの設計においては、単なる数値最適化のみならず設計解空間を把握した上で設計変数値を決定することが重要なのである。

3 QE の応用による設計解空間の射影

本節では、QE を応用して設計解空間を射影する具体的な方法について述べる。ここで扱うのは 2 次元平面への射影のみだが、3 次元空間への射影も同様にして行うことができる。

設計対象となる機械システムに関する制約条件集合を式 (1) とする。

$$\begin{aligned} &f_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, f_p(\boldsymbol{x}) = 0, \\ &g_1(\boldsymbol{x}) \neq 0, \ldots, g_q(\boldsymbol{x}) \neq 0, \\ &h_1(\boldsymbol{x}) \geq 0, \ldots, h_r(\boldsymbol{x}) \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は n 次元実数空間における変数、$f_i(\boldsymbol{x})$、$g_j(\boldsymbol{x})$、$h_k(\boldsymbol{x})$ は実数係数の多項式である。また、境界を含まない不等式制約 $e(\boldsymbol{x}) > 0$ ($e(\boldsymbol{x})$ は実数係数の多項式) が与えられた場合、それは $e(\boldsymbol{x}) \neq 0 \wedge e(\boldsymbol{x}) \geq 0$ として扱われるものとする。

式 (1) で定義される設計解空間の $x_i x_j$ 平面 $(i < j)$ への射影は、次式 (2) に対して QE を適用することで直接得ることもできる。

$$\exists (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\{ \text{式 (1)}\}. \tag{2}$$

ここでは、これに加えて文献 [6] の方法を紹介しておく。これは、QE を適用する前にグレブナ基底計算を行うことで、変数の数を予め減らしておくというものである。

まず、スラック変数 $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ および $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_r)$ を導入することにより、式 (1)

を次式 (3) および (4) に置き換える。

$$\begin{aligned} &f_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, f_p(\boldsymbol{x}) = 0, \\ &g_1(\boldsymbol{x}) \cdot s_1 = 1, \ldots, g_q(\boldsymbol{x}) \cdot s_q = 1, \\ &h_1(\boldsymbol{x}) = t_1, \ldots, h_r(\boldsymbol{x}) = t_r. \end{aligned} \tag{3}$$

$$t_1 \geq 0, \ldots, t_r \geq 0. \tag{4}$$

このような変換により、式 (1) に含まれる不等式はすべて方程式に変換される。また、これらの不等式によって表現されていた条件は、式 (4) で示されるスラック変数 $t_1, \ldots, t_r$ の値域に置き換えられる。あとは以下の手順により、式 (1) で表される設計解空間の $x_i x_j$ 平面への射影が得られる。

1. $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_q \succ t_1, \ldots, t_r, x_i, x_j$ に関する辞書式順序のもとで式 (3) のグレブナ基底 G_r を計算する。

2. G_r の中から $t_1, \ldots, t_r, x_i, x_j$ 以外の変数を含まない方程式をすべて選び出し、これらの方程式からなる集合を G_s とする。

3. 設計解空間は、次式 (5) を満足する点 (x_i, x_j) の集合として定義される。

$$G_s \cup \{t_1 \geq 0, \ldots, t_r \geq 0\}. \tag{5}$$

したがって、QE を用いて次式 (6) から変数 $t_1, \ldots, t_r$ を消去すれば、設計解空間の $x_i x_j$ 平面への射影が得られる。

$$\exists (t_1, \ldots, t_r)[G_s \cup \{t_1 \geq 0, \ldots, t_r \geq 0\}]. \tag{6}$$

式 (1) に対して直接 QE を適用する方法と比べた場合、この方法には以下の効果が期待できる。

- 計算効率の向上
設計変数の数が多い場合、限定子付変数の数を減らすことによって QE の適用回数を減らし、計算効率を向上させることが期待できる。実際、第 4 節で取り上げるヒートポンプシステムの設計問題に QEPCAD[2)] [1] を適用してみたところ、与えられた式 (1) ではメモリ不足により設計解空間の射影を得ることはできなくても、グレブナ基底計算で変数の数を減らすことによって求められるようになるものがあった。もちろん、これは設計変数の数とスラック変数の数、そして QE 計算負荷とグレブナ基底計算負荷のトレードオフになるので、必ずしも効果があるというわけではない。

- 限定子付変数の次数低減
限定子付変数が最大次数 1 のスラック変数のみとなる。したがって、消去対象変数の次数が 2 次以下に限定されている Weispfenning の方法 [4] を用いるときには効果的と考

2) `http://www.cs.usna.edu/~qepcad/B/QEPCAD.html`

えられる。第 4 節のヒートポンプシステムの設計問題に Risa/Asir[3] の QE を用いたところ、与えられた式 (1) では次数オーバーで計算できなかったものが、スラック変数の導入で解けるようになったものもあった。もちろん、グレブナ基底計算によってスラック変数の次数も上がることは充分にあり得るので、必ずしも効果があるわけではない。

一方、この方法には以下の問題点があることも知られている [3]。

- 実数情報の欠落
  グレブナ基底計算によって変数の数を減らした場合、取り除かれた変数が実数であるという情報が欠落する。したがって、この方法で得られる設計解空間の射影の中には、実際には解として成り立たないものが含まれている可能性がある。

この問題を回避するには、与えられた制約条件集合 (1) に、各変数が実数であるという必要十分条件、すなわち $x_k^2 \geq 0$ という条件を付け加える必要がある [7]。こうすることにより、x_k が実数であるという条件は、この不等式に対応するスラック変数が 0 以上との条件を通じて設計解空間の $x_i x_j$ 平面への射影に反映される。しかしながら、これは消去対象となる変数を単に x_k からスラック変数へ１対１に置き換えているに他ならず、変数の削減による計算効率向上の効果を相殺する。

実用性を考慮した場合、計算効率と厳密性とのトレードオフは避けられない。機械システムの設計では、最初からたった１つの最適解に設計が確定することはまれであり、複数の候補解の中から絞られていくことが普通である。これを考えると、この段階での実数情報の欠落には目をつぶり、不適切な解を選んでしまったことが最終的に解を絞り込んでいく段階で判明した場合、それを棄却するのが現実的な対応だと言える。

4 例題: ヒートポンプシステムの設計

本節では、ヒートポンプシステムの設計を例に取り、設計解空間を把握することで作業がどのように進められていくのかを解説する。なお、制約条件集合の記述やグラフ出力などには、筆者らが作成した初期設計支援システム [6] を用いた。

図 2 にヒートポンプシステムの構成を示す。これは、観光ホテル用に設計されたヒートポンプシステムを簡略化したモデルである。このシステムは、圧縮機、凝縮器、膨張弁、蒸発器の４つの要素から構成される。図中、内側の矢印はシステム内を循環する冷媒の流れを示している。冷媒は、蒸発器で排水から熱を奪って蒸発したのち、圧縮機で断熱圧縮されて高温高圧の気体になる。その後凝縮器において、源泉から来た水を加熱して液化し、高温高圧の飽和気液二相流となる。この飽和気液二相流は、膨張弁を通過して低温低圧になる。

外側の矢印は源泉から排水に至るまでの水の流れを示す。源泉を出た水は凝縮器で 30 ℃から 45 ℃まで加熱され、浴室用の温水として供給される。排水は蒸発器において 20 ℃から 5 ℃まで冷却される。ここで、以下の２つの条件が仮定されているものとする。

- 冷媒はフロン 22（R-22）とする。

[3] `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`

swd-heatpump.eps

図 2: ヒートポンプシステム

- 凝縮器および蒸発器の熱通過率は 1000 [W/m^{2}K] とする。

要求される設計作業は、以下の７つの設計変数値を決定することである。

Tc, Te 凝縮温度および蒸発温度 [K]

Ac, Ae 凝縮器および蒸発器の伝熱面積 [m^2]

Pd 圧縮機の吐出圧力 [Pa]

κ 圧縮機の圧縮比

Qr 冷媒の質量流量 [kg/s]

この問題では、ヒートポンプシステムがループ構造を持っていること及び熱力学特性が非線形であることにより、設計変数の相互依存関係は複雑であり、それを把握することは非常に困難である。ヒートポンプシステムの設計は、従来、次のように行われている。まず、凝縮器と蒸発器で交換される熱量を計算する。その交換熱量に基づいて、凝縮温度と蒸発温度を仮決めする。そして、その仮決めされた温度から他の設計変数値を計算する。適切な値が見つからなかった場合には仮決め温度を変更し、設計変数値を計算しなおす。このような試行錯誤を繰り返すことによって、全体の設計が行われる。

この例題では、設計解空間を２次元グラフとして提示することによって設計者が設計変数の相互依存関係を把握することが容易になり、試行錯誤なしで最適解にたどり着けるようになることを示す。設計作業は以下の手順で進められる。

1. **制約条件集合の記述**
   このヒートポンプシステムに関する制約条件集合を記述する。設計変数の数は約 80、制約条件数は約 100 となる。

2. **設計解空間の２次元グラフ表示**
   射影先平面を指定することにより、設計解空間を 2 次元グラフとして表示する。ここでは、凝縮温度 Tc を横軸とし、これとその他の設計変数との関係をグラフ表示することにする。結果を図 3 に示す。図中、黒線は設計変数の関係を示しており、灰色の線

swd-graph.eps

図 3: 設計解空間の 2 次元グラフ表示

およびハッチングされている部分は何らかの制約条件に抵触していることを示す。これらのグラフより、以下の情報が得られる。

- Tc が増加すると Te と Pd はほぼ線形に増加する。
- Qr と κ はあまり変化しない。
- Tc が増加すると Ac は非線形に減少し、Ae は非線形に増加する。

これにより、Qr と κ は指し当たって考慮の対象から外しても差し支えないことが分かる。ここでは、装置全体のサイズを押さえるため、全体の伝熱面積 $Ac + Ae$ を最小にするように設計するものとする。

3. 設計変数値の決定

凝縮温度 Tc と全体の伝熱面積 $Ac + Ae$ の関係を表示させる（図 4）。Tc の値が定まり、これによって他の設計変数の値も決定する。

5 おわりに－工学応用の将来性－

以上に述べたように、QE を応用することにより、従来の手法では不可能であった効果的な設計支援が可能となる。事実、機械設計分野でこのような研究を紹介すると大きな関心を

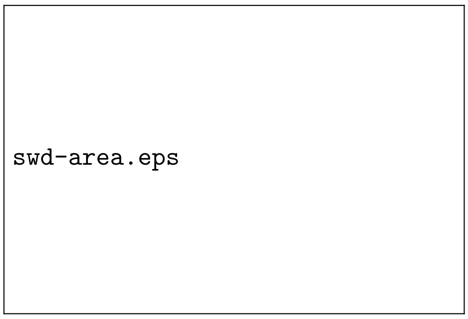

図 4: 設計変数値の決定

集める。しかしながら、実際の設計現場での実用応用への道はまだまだ険しいというのが筆者の率直な意見である。それは QE の低い計算効率という技術的な側面もさることながら、最も効果的な使い方を絞りきれていないというのが大きいように思う。現実の問題を QE の問題として定式化する手段が確立されていないと言ってもいい。

QE のみならず数式処理は非常に汎用性の高い技術と位置付けられる。しかし、工学分野の技術者にとって、それはあまりにも汎用的過ぎて抽象的な技術であり、現実世界の問題と結び付けて考えることが難しい。QE そして数式処理の工学応用を促進するには、数学に関心のある工学者と工学に関心のある数学者の協力が必要である。また、汎用的な技術を核としながらも、アプリケーションとしてはターゲットを絞るといったアプローチも考えるべきであろう。

参 考 文 献

[1] Collins, G. E. and Hong, H.: Partial Cylindrical Algebraic Decomposition for Quantifier Elimination, *J. Symb. Comput.*, **12**(3), 1991, 299–328.

[2] Dym, C. L. and Little, P.: *Engineering Design: A Project-Based Introduction*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.

[3] Thomas, S.: Reasoning over Networks by Symbolic Methods, *AAECC*, **10**, 1999, 79–96.

[4] Weispfenning, V.: Quantifier Elimination for Real Algebra – the Quadratic Case and Beyond, *AAECC*, **8**, 1997, 85–101.

[5] 畑村洋太郎: 実際の設計, 日刊工業新聞社, 東京, 1988.

[6] 沢田浩之, Yan, X.-T.: 制約ベース型初期設計支援システム, 数式処理, **8**(2), 2001, 19–35.

[7] 沢田浩之: 多項式制約間の矛盾検出法, 数式処理, **9**(4), 2003, 36–51.