

Quantifier Elimination — アルゴリズム・実装・応用 —

穴井 宏和*

(株) 富士通研究所 IT コア研究所

1 はじめに

限定記号消去問題 (quantifier elimination problem) とは、与えられた形式理論 (formal theory) について「限定記号付きの式 (一階述語論理式)」を入力とし「等価で限定記号無し
の式」を出力するアルゴリズムを考えることである。限定記号消去 (quantifier elimination :QE) の簡単な例として、実閉体の基本理論 (elementary theory of real closed fields) の場合、 $\forall x[x^2 - bx + c > 0]$ に対して $b^2 - 4c < 0$ を返す¹⁾。出力は入力に等価な式であり、限定記号は“消去”されている。限定記号消去の名前はこのことに由来している。

QE を研究する動機付けとなっているのは大きく以下の2つである: まず、QE 研究は元来数学の基本的な問題である。QE procedure が“存在”することが、しばしばその理論 (theory) についての重要な性質を示すことにつながる。次に、QE は、シンプルでありながら豊かな記述能力を持つ一階述語論理式 (first-order formula) によって表現される実に広範な範囲の重要な応用問題を (未解決問題も含め) 統一的にシステムチックに取り扱うことが可能であるため、計算機科学や各種の理工学分野の研究者が QE を活用するようになってきたことも強い動機付けとなっている。

近年、数値計算では解決が困難であった工学や産業上の問題に対し、代数的算法を利用することで、その本質的な解決を図ろうとする研究が数多く報告されてきている。中でも QE については、システム制御理論を中心に様々な工学の分野で多変数多項式不等式系 (multivariate polynomial inequalities: MPI) を解くツールとして広く認知されるに至っている。

本特集では、QE について代表的なアルゴリズムからその工学への応用までを紹介する。しかし、この特集で QE 研究の全ての側面を網羅することは不可能であるので、アルゴリズム・実装・応用それぞれについて以下に示すような方針に基づいて内容を構成する:

*anai@jp.fujitsu.com

¹⁾与えられた一階述語論理式に対して、等価で限定記号の無い式と同時にサンプル解も返す場合には、拡張 QE (extended quantifier elimination) と呼ぶ。

- アルゴリズム: 代表的アルゴリズムについて詳細を説明することは避け、本稿でその概略と位置付けを説明する。さらに興味を持った方のために、各アルゴリズムの詳細を知るための文献等の情報を提示する。
- 実装システム: 利用可能な QE の実装について本稿で簡単に紹介した上で、代表的な QE システムについて実際の開発者に紹介して頂く。
- 応用: 本稿で、QE 応用研究について知るための情報を簡単に紹介した上で、システム制御、機械系設計の分野での応用例を実際の応用研究者に紹介して頂く。

本特集を通して、QE とはどのような算法で、どのようなソフトがあり、そしてどのように実際の工学の問題の解決に利用されているか、あるいは、QE 研究では何が求められているのか感じて、この分野へ興味を持っていただけたら幸いである。

QE に内容を絞った教科書というのは残念ながら無い。稀に計算機代数の教科書に QE の記述がある場合がある。例えば B.Mishra の本 [28] は、実代数 (real algebra) に関する章があり QE についても説明されており、最初に読むのに適している。QE についてさらに勉強したい方には、代表的な QE 関連論文のコレクションという形になっている本 [11] があるので、これを参照することをお勧めする。

2 QE アルゴリズム研究：歴史と趨勢

Prologue この分野の始まりは 1930 年代に遡る。1930 年に A.Tarski が実閉体 (real closed field) における decision procedure が存在することを証明し、その後、QE のアルゴリズムを示した [35, 11]。しかし Tarski の方法は非常に効率が悪い (正確には、elementary recursive でない) ものであった²⁾。

Mainstream – CAD 1975 年に、G.E.Collins が、与えられた多項式系に対して、変数空間を各多項式の符号が不変である領域に分割する新しい代数的方法である Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD) を提案し、CAD による QE アルゴリズムを提案した [12]。(簡単な CAD の説明は、C.W.Brown による本特集の論文を参照のこと。)その後、この CAD アルゴリズムが QE アルゴリズムの中心となり、いくつもの改良の研究が進められることとなる。特に、H.Hong らによる partial CAD アルゴリズムは、SACLIB 上に QEPCAD として実装された [13]。これが QE アルゴリズムの最初の実装となる³⁾。

CAD アルゴリズムの改良の研究は現在にいたるまで継続して行われている一方で、いくつかのクラスの問題に対して QE アルゴリズムの計算量の下限が指数的であること、すなわち本質的に難しい問題であることが示された [14, 36]。このことで、QE アルゴリズムの研

²⁾Tarski の方法を、フィードバック系の設計問題に応用した研究もある [6]。これが QE のシステム制御への最初の応用となるが、実際にはほとんど使えものではなかった。

³⁾CAD の改良についての文献としては、まず [11, 24, 19, 20, 10] を見て、さらに他の改良を知りたい方は以下を参考に: 等式制約の場合 [26, 27], 3 変数の場合 [24, 7, 9], 等号を含まない不等式の場合 [25, 34]。

究が、応用問題と関連した特別な問題のクラスに対するより効率的な専用 QE アルゴリズム (special QE algorithm) の研究へと重心を移していくことになる。

Alternatives – general QE CAD 以外の入力に制限のない汎用 QE アルゴリズム (general QE algorithm) としては、1993 年に comprehensive Gröbner basis (CGB) [37] と multivariate real root counting (RRC) [30] を組み合わせた新しい QE アルゴリズムが V.Weispfennig により提案された [39]。この方法は、特に等式制約が多く含まれる場合に適している。

また、計算量という点で、漸近的に高速な QE アルゴリズムの研究が J.Renegar や S.Basura らによって行われている [33, 8]。これらのアルゴリズムは、最悪計算量の点からは最も効率の良いアルゴリズムとなっているが、実装例は無く実問題に適用した際にどの程度の実効性をもつかまだよくわかっていない。

Alternatives – special QE 1990 年代に入り QE の実装が進みツールとして一般に提供されるようになると、応用分野の研究者が、数値計算に基づく手法では解決が困難であった問題を解くために、パラメータ付きの最適化・非凸最適化の強力なツールとして QE を用いる試みが数多く現れてきた。これによりいくつもの未解決問題が QE を用いることで解決されることとなった。しかし、実際の工学・産業上で求められる問題の規模・計算時間の点からするとまだ実用的ツールと言うには不十分である。

そこで、応用上で重要な問題をカバーする制約条件に着目し、その特別なクラスの問題に特化したより高速な QE アルゴリズムが提案されてきた。一変数多項式の正定性条件に対する Sturm-Habicht 列を用いた QE アルゴリズム [18] や限定記号付きの変数に関して低次 (例えば 1 次・2 次) の多項式制約に対する Virtual Substitution による QE アルゴリズム [23, 38] 等がそうである。これら 2 つのアルゴリズムと実装の簡単な説明は、本特集の H.Anai & S.Hara 及び A.Dolzmann & A.Seidl による論文を参照されたい。これらのアルゴリズムは、制御系設計など各種の応用において有用であることも示されている [1, 2, 16]。本特集の H.Anai & S.Hara 及び 沢田氏による QE の応用を紹介した論文はこの 2 つの専用 QE アルゴリズム適用の成功例となっている。

Variants I – extension of applicability 一般に、QE は多項式により記述される問題のみ扱うことが可能であるが、さまざまな工学の分野では、しばしば三角関数や指数関数といった超越関数を含む制約問題や、変数が離散値を取る問題を解くことが必要とされる。これらの要求に答えるために、超越関数を含む場合の QE アルゴリズム [4, 41, 29, 5] や、ある整数計画問題に対する QE アルゴリズム [40] も提案されている。

さらに、実数体の QE 以外に、複素数や p 進数の場合の QE アルゴリズムの研究もある。REDUCE 上の QE システムである REDLOG に一部実装も行われており、これらについては本特集の A.Dolzmann & A.Seidl の論文を参照していただきたい。

Variants II – extension of tractability: symbolic-numeric 実際の工学等の応用において、制約問題を数値的な手法で解く場合と同様の前提条件の下で、QE アルゴリズムを

効率化するという方向の研究が最近提案されている:

まず, 入力として一階述語論理式だけでなくサンプルのパラメータの値が与えられた時に, そのパラメータ値を含む semi-algebraic set の全ての点についてのみ入力式と等価な限定記号無しの式を計算する QE アルゴリズムが提案された [17]. この方法は, local QE と呼ばれる. 例えば, 実際の回路や制御系設計者は, “経験と勘”に基づいて設計パラメータの値を推定し, それを始点に推定値を変えながら数値シミュレーションを繰り返して設計パラメータ値を決定する. local QE はこのような状況を念頭において設定を考えたものと言える.

次に, 凸最適化問題を解く際に, 予め 1 つの実行可能解が与えられた状況を考える. これは, 凸最適化の数値的な手法である内点法 (interior point method) において, 1 つの実行可能解が与えられたとして, その解から最適解を求めることを考慮している. このとき, 問題の凸性と与えられた実行可能解を利用することで QE アルゴリズムを劇的に高速化できることが示された [3]. この方法は, Convex QE と呼ばれる.

これらのアルゴリズムは, 従来の QE アルゴリズムに比べ, 効率・出力結果のシンプルさとともに格段に良いものとなっている. さらに, これらの手法は, 数値的手法で得られた数値解が本当に正しい解かどうかの保証を与える方法にもなっている.

その他, 数値的な手法との組み合わせとしては, 近似 QE (Approximate QE) アルゴリズムの研究がある: H.Hong らによる研究 [21, 22], 最近では S.Ratschan による区間演算を利用した試みがある [31].

ここに挙げた研究に見られるように, 従来の数値的な手法で使われているアイデアを QE の代数的な算法に取り入れて高速な計算を実現するという方向性は非常に興味深い. 今後, こういった数値/数式の両手法を巧く融合したアプローチ (Symbolic-Numeric Approach for Real Algebraic Constraints) が, QE の計算量の壁を乗り越えるためには有望であろう.

Simplification of formulas QE によって得られる結果は, しばしば非常に大きな論理式となる. 特に, 専用 QE アルゴリズムを用いた場合は顕著である. これは, 論理式の変形を形式的に繰り返す行うために冗長な表現となってしまった結果である. 従って, QE により得られた大きな式を簡略化することは結果の意味を明確化するためにも重要となる. また, 計算効率の面でも, アルゴリズムの途中で適宜簡略化を行うことが効率化の重要な鍵となる.

簡略化の手法については, A. Dolzmann & T. Sturm による [15] に体系的に説明されている. また, CAD を用いた式の簡略化は非常に効果的で, 専用 QE アルゴリズムにより得られた不必要な式を多く含む大きな式が, 実際に驚くほどに簡単な式に簡略化される例が報告されている. 詳細は, 本特集の C.W. Brown による QEPCAD ので紹介を参照されたい.

3 QE パッケージ

QE の実装は, いくつかの代表的な数式処理システムにおいて行われている. 以下に特徴・開発者をそれぞれ列挙しておく. 特に, 最初の 3 つについては, 本特集に開発者自身によるシステムの紹介があるので参照していただきたい.

- QEPCAD / QEPCAD B on SACLIB
 by Hoon Hong (NC State Univ), and C.W.Brown (U.S. Naval Academy) et al.
<http://www.cs.usna.edu/qepcad/B/QEPCAD.html>
 ・ partial CAD アルゴリズム , CAD による式の簡略化 (SLFQ) が実装されている .
- REDLOG on REDUCE
 by T.Sturm and A. Dolzmann, and A. Siedl (Univ. of Passau)
<http://www.fmi.uni-passau.de/redlog/>
 ・ Virtual Substitution による QE アルゴリズム (1,2 次) と CAD アルゴリズム , 及び , 式の簡略化 [15] が実装されている .
- SyNRAC on MAPLE
 by H.Yanami and H. Anai (Fujitsu Laboratories Ltd)
 ・ Virtual Substitution による QE アルゴリズム (1 次) と Sturm-Habicht 列による QE アルゴリズム及び , 簡単な式の簡略化が実装されている .
- CGBRRC on MAS
 by A. Dolzmann (Univ. of Passau)
<http://www.fmi.uni-passau.de/algebra/projects/index.php3>
 ・ CGB と RRC を組み合わせた QE アルゴリズムを Passau 大学で開発中の数式処理システム MAS 上に実装したものである .
- Mathematica
 by A. Strzebonski (Wolfram Research, Inc)
 ・ experimental command ではあるが , CAD アルゴリズムが実装されている . online help で “Cylindrical Algebraic Decomposition” を検索すると使い方等の情報が得られる .
- Risa/Asir
 by T.Sturm, A.Dolzmann (Univ. of Passau), H.Anai (Fujitsu Laboratories Ltd)
 ・ Virtual Substitution による QE アルゴリズム (1,2 次) [built-in command]⁴⁾ , Sturm-Habicht 列による QE アルゴリズム [asir library] , 及び , 式の簡略化 ([15] の一部) が実装されている .

⁴⁾これとは独立に、産総研の沢田氏による Virtual Substitution アルゴリズムの Risa/Asir への実装もある .

4 QE 応用

QE の応用範囲は，多項式制約で表現される問題を扱えるため極めて広範な範囲を網羅している．代表的な応用分野を以下に示す：

- Real theorem proving
- Geometric reasoning
- Network analysis, sizing, and diagnosis (e.g. analog circuit, etc)
- Non-convex parametric linear and quadratic (nonlinear) optimization
- Transportation problems, Scheduling problems
- Real implicitization of algebraic surfaces
- Mechanical Engineering, theoretical mechanics
- System and Control theory
- Stability analysis for PDE's
- Parametric solving of linear integer congruence systems

本特集では，システム制御理論や機械系設計への応用を取り上げた．これらの例は，いずれも典型的な QE の適用法を示した良い事例となっている．是非そちらも一読いただきたい．

多岐にわたる QE 応用の研究について知りたい方には，各種の QE 応用の研究について体系的に整理して紹介した S. Ratschan によるレポート [32] や代表的な QE ツールの実際の計算結果・時間とともに応用分野を紹介した [16] が良い導入となるであろう．

5 おわりに：課題/今後の展望

近年，アルゴリズム・実装・応用すべてにおいて多くの重要な研究がなされてきたが，まだまだ残された課題は多い．その中で筆者が特に重要だと考える課題について以下に簡単にまとめておく．

- QE が，科学技術計算の標準的なツールとして認識されるには，計算効率の面でまだ不十分である．問題の構造を利用した専用アルゴリズムや数値・数式ハイブリッドアプローチによる高速化という方向での研究が有望であろう．
- QE システムも，一般に使えるものが揃ってきたものの，数式処理の専門家でないユーザが使うことを考えると，インターフェースや結果の表示・可視化等の点でまだ十分なレベルではない．今後，各応用分野の問題に適應させていく形で，インターフェース部分の充実を図り，QE システムを核とした各分野向け専用ツールを提供することも重要になると思われる．

- 応用を広げていくには、各分野向けツールの提供とともに、実際の応用の分野での適用成功事例を数多く蓄積して、QE をいかに使うかその適用の方法論を確立して行くことが必要不可欠である。

QE は、計算機代数の研究において長い歴史を持つ重要なテーマであるが、(国内に限らず) 実際の研究者の人口は少ない。また、邦書はもちろん洋書でも QE 関連の教科書・入門書といえるものはほとんど無く、このことが新しい研究者が少ないことの一つの要因ともなっているであろう。その意味でも、今回の特集が、このチャレンジングかつ重要な分野への多くの研究者の意欲的な挑戦の契機となることを期待している。

さらに、この特集が、QE アルゴリズムの改良や適用範囲の拡大に向けたさらなる研究への刺激となり、計算機代数、数値計算(数理最適化等)、そして応用分野の研究者による複合的・横断的研究の場を創生する契機を与えることになれば幸いである。

謝辞 (Acknowledgement)

今回、特集論文執筆を快く引き受けてくださった全ての著者の方々に深く感謝いたします。また、本学会誌編集委員長の森継氏、同副委員長の関川氏には、特集の編集に関していくつもの貴重なアドバイスを頂き感謝いたします。Moreover I would like to thank Prof. H.Hong and Dr. T.Sturm for their invaluable advice and kindness.

参 考 文 献

- [1] H. Anai and S. Hara. Fixed-structure robust controller synthesis based on sign definite condition by a special quantifier elimination. In *Proceedings of American Control Conference 2000*, pages 1312–1316, 2000.
- [2] H. Anai and S. Hara. A parameter space approach for fixed-order robust controller synthesis by symbolic computation. In *Proceedings of IFAC World Congress on Automatic Control b'02*, 2002.
- [3] H. Anai and P. A. Parrilo. Convex quantifier elimination for semidefinite programming. In *Proceedings of the 6th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing 2003*. To appear, 2003.
- [4] H. Anai and V. Weispfenning. Deciding linear-trigonometric problems. In C. Traverso, editor, *ISSAC'2000*, pages 14–22. ACM-Press, 2000.
- [5] H. Anai and V. Weispfenning. Reach set computation using real quantifier elimination. In *Proceedings of International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC2001)*, volume 2034 of *LNCS*, pages 63–76. Springer, 2001.
- [6] B. Anderson, N. Bose, and E. Jury. Output feedback stabilization and related problems — solution via decision methods. *IEEE Trans. Auto. Control*, 20(1):53–65, 1975.

- [7] D. S. Arnon, G. E. Collins, and S. McCallum. An adjacency algorithm for cylindrical algebraic decompositions of three-dimensional space. *Journal of Symbolic Computation*, 5(1-2):163–188 (or 163–187??), Feb.–Apr. 1988.
- [8] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy. A new algorithm to find a point in every cell defined by a family of polynomials. In B. Caviness and J. Johnson, editors, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, pages 341–349. Springer, Wien, New York, 1998.
- [9] C. W. Brown. Improved projection for CADs of R3. In C. Traverso, editor, *Proceedings of the 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC-00)*, pages 48–53, N. Y., Aug. 7–9 2000. ACM Press.
- [10] C. W. Brown. Improved projection for cylindrical algebraic decomposition. *Journal of Symbolic Computation*, 32(5):447–465, Nov. 2001.
- [11] B. Caviness and J. Johnson, editors. *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*. Texts and monographs in symbolic computation. Springer-Verlag, 1998.
- [12] G. Collins. *Quantifier Elimination for Real Closed Fields by Cylindrical Algebraic Decomposition*, LNCS 32. Springer Verlag, 1975.
- [13] G. Collins and H. Hong. Partial CAD construction in quantifier elimination. Technical Report OSU-CISRC-10/89 TR 45, The Ohio State University, Computer and Information Science Research Center, Columbus, OH, Oct. 1989.
- [14] J. H. Davenport and J. Heintz. Real quantifier elimination is doubly exponential. *Journal of Symbolic Computation*, 5(1-2):29–35, Feb.–Apr. 1988.
- [15] A. Dolzmann and T. Sturm. Simplification of quantifier-free formulas over ordered fields. Technical Report MIP-9517, FMI, Universität Passau, D-94030 Passau, Germany, Oct. 1995. To appear in the *Journal of Symbolic Computation*.
- [16] A. Dolzmann, T. Sturm, and V. Weispfenning. Real quantifier elimination in practice. In B. H. Matzat, G.-M. Greuel, and G. Hiss, editors, *Algorithmic Algebra and Number Theory*, pages 221–247. Springer, Berlin, 1998.
- [17] A. Dolzmann and V. Weispfenning. Local quantifier elimination. In C. Traverso, editor, *ISSAC 2000: 7–9 August 2000, University of St. Andrews, Scotland: proceedings of the 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 86–94, New York, NY 10036, USA, 2000. ACM Press.
- [18] L. González-Vega. A combinatorial algorithm solving some quantifier elimination problems. In B. Caviness and J. Johnson, editors, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, Texts and monographs in symbolic computation, pages 365–375. Springer-Verlag, 1998.

- [19] H. Hong. An improvement of the projection operator in cylindrical algebraic decomposition. In *ISSAC: Proceedings of the ACM SIGSAM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 261–264, 1990.
- [20] H. Hong. Simple solution formular construction in cylindrical algebraic decomposition based quantifier elimination. In P. S. Wang, editor, *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 177–188, Berkeley, CA, July 1992. ACM Press.
- [21] H. Hong. Approximate quantifier elimination. In *Proceedings of SCAN'95*, 1995. Invited Talk.
- [22] H. Hong and A. Neubacher. Approximate quantifier elimination. In *Proceedings of IMACS-ACA'96*, 1996.
- [23] R. Loos and V. Weispfenning. Applying linear quantifier elimination. *The Computer Journal*, 36(5):450–462, 1993. Special issue on computational quantifier elimination.
- [24] S. McCallum. An improved projection operation for cylindrical algebraic decomposition of three-dimensional space. *Journal of Symbolic Computation*, 5(1-2):141–161, Feb.–Apr. 1988.
- [25] S. McCallum. Solving polynomial strict inequalities using cylindrical algebraic decomposition. *The Computer Journal*, 36(5):432–438, 1993.
- [26] S. McCallum. On projection in CAD-based quantifier elimination with equational constraint. In S. Dooley, editor, *ISSAC 99: July 29–31, 1999, Simon Fraser University, Vancouver, BC, Canada: proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 145–149, New York, NY 10036, USA, 1999. ACM Press.
- [27] S. McCallum. On propagation of equational constraints in CAD-based quantifier elimination. In B. Mourrain, editor, *ISSAC 2001: July 22–25, 2001, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada: proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 223–231, New York, NY 10036, USA, 2001. ACM Press.
- [28] B. Mishra. *Algorithmic Algebra*. Springer Verlag, 1993.
- [29] P. Pau and J. Schicho. Quantifier elimination for trigonometric polynomials by cylindrical trigonometric decomposition. *Journal of Symbolic Computation*, 29(6):971–983, June 2000.
- [30] P. Pedersen, M.-F. Roy, and A. Szpirglas. Counting real zeroes in the multivariate case. In F. Eyssette and A. Galigo, editors, *Computational Algebraic Geometry*, volume 109 of *Progress in Mathematics*, pages 203–224. Birkhäuser, Boston, Basel; Berlin, 1993. Proceedings of the MEGA 92.

- [31] S. Ratschan. Approximate quantified constraint solving by cylindrical box decomposition. *Reliable Computing*, 8(1):21–42, 2002.
- [32] S. Ratschan. Applications of quantified constraint solving –bibliography and benchmark problems –. Technical report, 2003, via <http://www.mpi-sb.mpg.de/ratschan/appqcs.html>.
- [33] J. Renegar. On the computational complexity and geometry of the first-order theory of the reals. *Journal of Symbolic Computation*, 13(3):255–352, Mar. 1992. Part I–III.
- [34] A. Strzeboński. Solving systems of strict polynomial inequalities. *Journal of Symbolic Computation*, 29(3):471–480, Mar. 2000.
- [35] A. Tarski. *Decision Methods for Elementary Algebra and Geometry*. Berkeley: Univ. of California Press, 1951.
- [36] V. Weispfenning. The complexity of linear problems in fields. *Journal of Symbolic Computation*, 5(1-2):3–27, Feb.–Apr. 1988.
- [37] V. Weispfenning. Comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation*, 14:1–29, July 1992.
- [38] V. Weispfenning. Quantifier elimination for real algebra—the quadratic case and beyond. *Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing*, 8(2):85–101, Feb. 1997.
- [39] V. Weispfenning. A new approach to quantifier elimination for real algebra. In B. Caviness and J. Johnson, editors, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, pages 376–392. Springer, Wien, New York, 1998.
- [40] V. Weispfenning. Mixed real-integer linear quantifier elimination. In S. Dooley, editor, *ISSAC'99*, pages 129–136. ACM-Press, 1999.
- [41] W. Weispfenning. Deciding linear-transcendental problems. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing 2000*, pages 423–438. Springer, 2000.