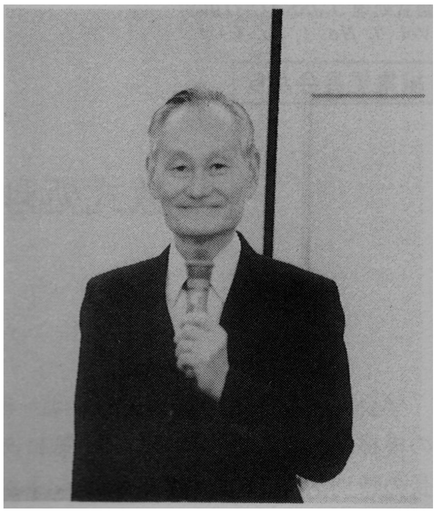
数式処理 *J.JSSAC (1998)*
Vol. 7, No. 1, pp. 2 - 5

大会特別講演



数式処理の想い出
Memorials on the Formula Manipulation

一松 信
Sin HITOTUMATU

Abstract

At the Annual Meeting of the Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation on June 1998, the author, former President of the Society, talked his experiences on Formula Manipulation or Computer Algebraic Systems. He also mentions several remarks or comments on the application of such systems to Mathematical Teaching/Learning.

1 経過

私がコンピュータに触り始めたのは、米国留学から帰国した 1959 年夏に、日本物理学会の講習会に出席した折です。動機は数学の専門の研究に数値計算の必要性を感じたためです。その頃からコンピュータによる式の計算に興味を持っていました。

数式処理を本格的に始めたのは、京都大学数理解析研究所に移り、1971 年頃から渡辺隼郎氏の手伝いをしたときからです。そして本格的に決心したのは、1976 年にカナダに滞在した帰りに、ニューヨーク郊外のヨークタウンハイツにある IBM 中央研究所で開かれた第 2 回数式処理国際会議に立寄る機会を得た以後です。

このときには日本から後藤英一氏が出席して講演されました。また MIT の 1 年生が多項式の因数分解の算法を発表して評判になりました。

何よりもコンピュータによる大規模な計算により、四色問題が解決された直後でした。それよりも散発単純群の一つである Baby–monster 群の構成がほぼ完了しており、その製作費(コンピュータ使用料)1 万ドルを巡っての議論や、群論用のコンピュータ計画など、夜のセミナーが有益でした。

しかしこの会議については率直にいって「コンピュータによる数式処理は強力な道具だが、我々には高峰の花だ。数億円の機械を自由に利用できる貴族でなければ手が届かない。」と

いう印象でした。

だがその後、直に mu–Math(今日の Derive) が発表され、ずっと手近になりました。1980 年にバークレイで開催された ICME–4 では、2 回にわたる VAXIMA(Macsyma の VAX 版) の実演付き講演があり、大学初年級の演習問題 20 題を (CPU 時間総計) 1 分で解いたのに驚きました。もはや完全に実用の域に達したと気付きました。

同じ年の 10 月に日本とオーストラリアで IFIP の大会があり、数式処理も話題になりました。「数年後には電卓でも」というその折の予言は十年程遅れましたが、やっとその時代になりました。米国での電卓研究会に出席しますと、小学校では分数計算のできる電卓、中学校では関数・画像電卓、高等学校では数式処理のできる電卓が、算数・数学教育の必需品という雰囲気です。

その後京都大学数理解析研究所のコンピュータ更新の折に、いくつかの圧力を排して DEC–2020 を導入し、続いて REDUCE 2.0 を購入して数式処理の利用を計りました。そのおかげで日本における数式処理の先駆者の一人とされたようで、身にあまる光栄です。

2 電卓による数式処理

数式処理は強力な道具です。たかが道具; されど道具です。決して「数学が不要」になるのではなく、それを使いこなすための「数学」は益々必要です。「数式処理を使うと頭が悪くなる」という批判には、広田良吾先生のお言葉「数式処理はもともと頭の悪い人間が使う道具である」をもって、お答えとしましょう。

Mathematica や Maple のような高級システムが普及した現在、電卓による数式処理など時代錯誤かもしれませんが、やはり手軽に何処でも何時でもすぐに使える電卓の価値は無視できません。また残念ながら 1980 年の予言通り、この方面で日本が立遅れたのも否定できません。

数式計算がいくらかできる電卓の最初は、1986 年に発売されたヒューレット・パッカード社の HP–28C とその改良型の HP–28S と思います。これは例えば $(a+b)\times(a-b)$ を計算するのに

$$\rightarrow \quad a(a+b)-b(a+b) \quad \rightarrow \quad a^2+ab-ba-b^2 \quad \rightarrow \quad a^2-b^2$$

といった操作が必要でした。教育的ではありますが、実用には程遠かったようです。

その後 1990 年頃に HP–48X ができ、数式 (普通の形式で) の印刷も可能になりました。しかしやはり 1993 年頃に発売された TI–92 は、Derive を搭載して驚異的です。1998 年秋にはこの簡易版 (といっても数式処理機能はさらに充実) TI–89 が発売予定です。高等学校以上の数学教育に不可欠ですが、多項式の因数分解・微分積分の計算など、教科書にある問題の大半が、式を入力してキーを押すだけですぐにできるとなると、どういう内容を教えるべきか、根本から考え直さなければいけない時がきたようです。

3 SGN の三位一体

以前からいい古した言葉ですが、現在の数式処理システムは

$$\mathbf{S}\text{(Symbolic; 代数)},\mathbf{G}\text{(Graphic; 幾何)}, \mathbf{N}\text{(Numeric; 算数)}$$

の三位一体システムです。私自身最初のうち数式処理システムを利用したのは、式の計算よりも多倍長整数の計算でした。図形も随分活用しました。その方面にもいろいろと面白い注意がありますが、初等教育の話が主なので、ここでは省略します。

我々は関数のグラフというと、x 軸を横に右を正に、y 軸を縦に上を正に取るものと思っていました。ところがこの頃グラフを描かせると、x 軸を縦に取ったり、左向きを正にしたりする図が現れて、驚いています。もちろん正しく座標を付けて目盛もちゃんとしていれば、それで差支えないようなものですが、いくら「自由化」といっても少し奔放すぎます。意図的にそのように教えている先生がいるのでしょうか？

Mathematica のような完備したシステムでは、関数のグラフはうまくスケーリングして描いてくれますが、画像電卓で範囲を指定してうまく描かせる練習も必要と思います。また電卓では描く速度が遅いために、かえって媒介変数が動いたときに、動点が曲線を描いていく様子が実時間で見えます。電卓の肩をもつようですが、コンピュータは何でも速い程よいというものではないようです。

かつて神戸の村上温夫先生がなさった発見学習:

Mathematica により $x^4 + m$(m は正の整数) が因数分解できる場合を調べ、それが $m = 4n^4$(n は正の整数) に限ることを発見させた、という優れた例があります。

しかし図形では「ピタゴラスの円もどき」–ピタゴラス三角形の二辺 (a, b) を平面座標としてプロットしたところ、円状に並ぶ点列が現れたが、よく調べると本当の円周上にはなかったという話–の例のように「実験数学」だけでは誤った結論を得る場合もあります。実験観察の結果と、証明された数学の事実との区別が大事です。(後述)

4 コンピュータを過信すると

現在の数式処理システムは高度に発達していますが、やはり過信してはいけないようです。昔からの問題の一つに、定積分の結果が合わない例があります。その原因のほとんどは、積分が正しく計算できていないためではなく、端点の値を代入したときの計算誤りです。特に逆三角関数に対して、機械的にその主値をとった失敗です。

昨年「計算機代数」の講義中に、ある論文からそのような一例を見付けました。要約すると

$$\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = ?$$

です。加法定理から全体の tan の値は 1 ですが、これを $\pi/4$ と早合点してはいけません。各々の arctan の値が主値ならば、和全体は $3\pi/4$ と $3\pi/2$ の間にあり、$5\pi/4$ が正しい答です。これを数検 (実用数学技能検定) 1 級 (大学程度) に出題したところ、正解率が極めて低い結果になりました。コンピュータにこのような判断をさせるには高度の人工知能を必要とします。差し当たっては数値積分の結果と比較して、必要ならば補正をする「対症療法」が無難と思います。

これはもちろん数式処理システムを使うなというのでありません。それをうまく使いこなすよう使用に当って注意せよ、と申しているだけです。

別の一例を挙げるならば、本年１月のある研究会で山形の槙誠司先生が報告した「ピタゴラスの円もどき」の話があります。多数のピタゴラス三角形 (辺長 $a:b:c$ が整数比の直角三角形) の直角を挟む二辺の値 (a,b) を平面座標としてプロットしたところ、色々な図形; 特に円状の点列が現れたという観察です。

残念ながらそれらは真の円周上にはありませんでした。この例は図形上で観察された「命題」と、真に証明された「定理」との区別が重要なことを示しています。他方「真の円でなくて残念だった」で終りではなく、何故そのような配列が現れたのか、どの位真の円に近いのか、同様の配列が他にもないかなどと調べてみると、色々と面白い事実がわかりました。この種の「開いた問題」は大変興味があり、コンピュータはその良いきっかけを与えてくれるものですが、先生の力量がもろに問われる場面でもありましょう。

5 数式処理と数学教育

この課題は大問題です。これについては本年８月に筑波大学で国際会議が開催される予定であり、それに大きな期待をしています。ここで余り申上げることはありませんが、希望を込めていくつか述べたいと思います。

現在使われている数式処理システムの大半は、もともと研究用に開発された道具であり、教育用を目指したものではありません。近年では印刷などが通常の数式に近い形式になり、入力もかなり自然になりました。しかしなお一層使用者にとって「使い易い」ものに改良していく努力がほしいと感じます。

現在の数式処理システムによれば、高等学校数学の 80%位はそれで処理できます。しかしそれによって計算技術は不要だとか、思いきって内容を削減しようなどと安易に考えるのは危険だと信じます。数式処理システムを見て、魚が水を得たように喜んで活用を計る先生方も多いと信じますが、内心自分の首を危うくする危険品と思っておられる方も少なくないと思います。あるいは残された 20%に全勢力を注ごうとお考えの方もおられるかもしれません。

数式処理の意外な難問の一つは、式の表現が一意的でなく、正しい答が多数存在する場面です。不定積分や微分方程式の解などがその典型例です。もっと小さい例でも、平方根を含む数が $a+b\sqrt{c}$ の形で出た答と、分母を通分して $(p+q\sqrt{c})/d$ の形で出た答とが同一の値であることに気付くまで、かなり長い間首をひねった経験があります。

結局機械そのものに善悪があるのではなく、それを如何に使いこなすか、使用者の腕が問われるのでしょう。先生の役割は今迄以上に重要になるとともに、その力量がもろに問われるというのがこれからの姿でしょう。もちろん教え方とそれに伴って教える内容が大きく変ることは当然です。単に「数学」だけの問題ではなく、多方面にわたる諸科目の先生方のティームティーチングも含めた「総合的学習」をも視野に入れなければなりません。

数式処理が数学者に「計算量の課題」を実際的に教えてくれた; 出力量を評価しておかないと収拾がつかなくなる、というのも隠れた効用の一つと感じています。数学教育そのものに関して色々と述べたいこともありますが、それは本日の会の主目的ではないと思いますので、以上の注意に留めます。